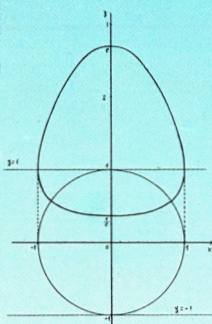


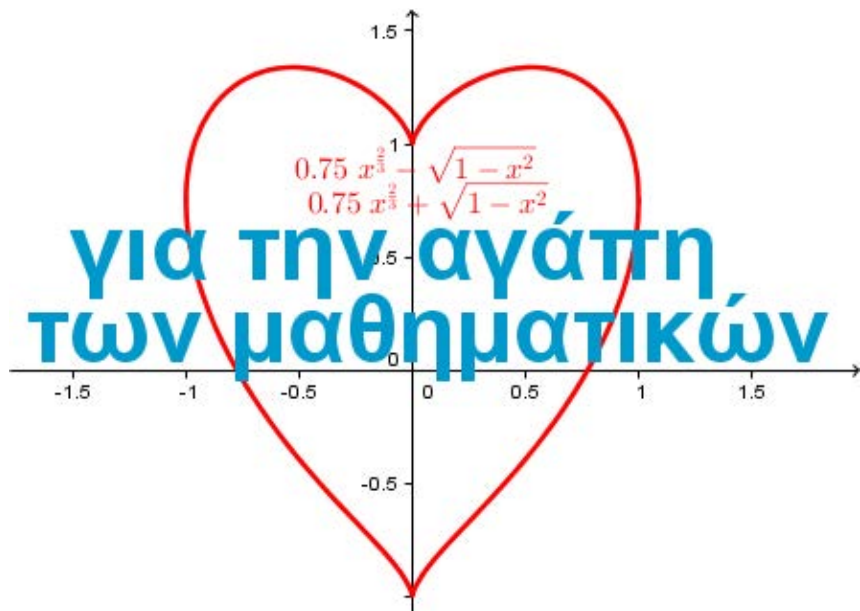
4 ΠΑΚΕΤΑ

ΣΥΓΓΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

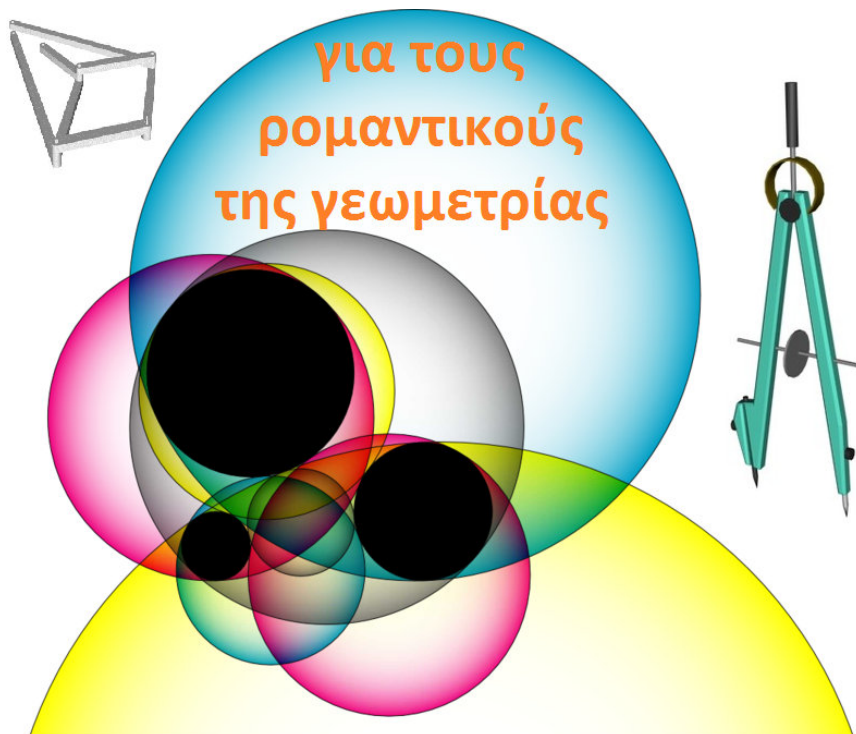
Κατάλληλο βοήθημα για τόν διδάσκοντα -
έρευνητή - φροντιστή - σπουδαστή -
φοιτητή - υποψήφιο Άνωτάτων Σχολών,
καθώς και κάθε ασχολούμενο με τη
Μαθηματική Άνάλυση.

ΠΡΩΤΟΤΥΠΟ ΚΑΙ ΔΙΑΧΡΟΝΙΚΟ





<https://parmenides51.blogspot.com/>



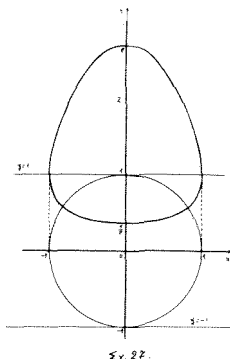
<https://parmenides52.blogspot.com/>

4 ΠΑΚΕΤΑ

ΣΥΓΓΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

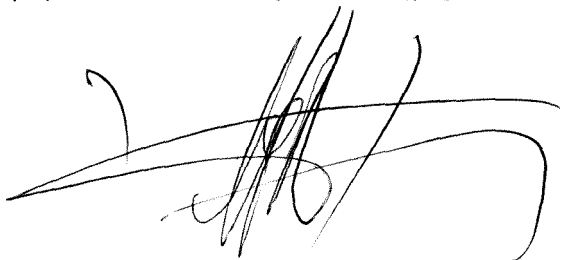
Κατάλληλο βοήθημα για τόν διδάσκοντα -
έρευνητή - φροντιστή - σπουδαστή -
φοιτητή - υποψήφιο 'Ανωτάτων Σχολών,
καθώς και κάθε ασχολούμενο μέ τη
Μαθηματική 'Ανάλυση.

ΠΡΩΤΟΤΥΠΟ ΚΑΙ ΔΙΑΧΡΟΝΙΚΟ



ΠΑΤΡΑΙ 1994

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τήν ιδιόχειρον ὑπογραφήν τοῦ συγγραφέως

A handwritten signature in black ink, consisting of several overlapping, fluid strokes that form a complex, stylized shape.

Διεύθυνση συγγραφέως: Ν. Καξαντζάκη 14, Πάτραι 264 42

Ἀπαγορεύεται ἡ ἀνατύπωση, κ.λπ. ἢ μετάφραση τοῦ παρόντος
ἢ καί μέρους αὐτοῦ ἄνευ ἐγγράφου ἀδείας τοῦ συγγραφέως..

ΑΦΙΕΡΩΝΕΤΑΙ

Στόν αείμνηστο πατέρα μου,
ἀθῶο θῦμα τῶν σφαγέων τοῦ Ἑθνους,
ἐπὶ τῇ συμπληρώσει πεντηκονταετίας,
στή σύζυγό μου Φωτεινή,
ἐπὶ τῇ συμπληρώσει τριακονταετοῦς
ἐγγάμου βίου,
καί στούς σπουδαστάς μου,
ἐπὶ τῇ συμπληρώσει εἰκοσαετοῦς
διδασκαλίας μου.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Πέρυσι αισθάνθηκα τήν παρόρμηση νά κάνω κάτι γιά τόν αείμνηστο δολοφονημένο πατέρα μου ἐπί τῇ συμπληρώσει ἐφέτος πενήντα ἐτῶν ἀπό τή δολοφονία του.

Ἀφορμή γιά τό θέμα τοῦ βιβλίου εἶναι ἡ κόρη μου Μαρίνα. Φοιτήτρια τῆς Φυσικῆς Σχολῆς μέ ἀπασχολοῦσε στά Μαθηματικά. Καί ἀπ' αὐτό μοῦ γεννήθηκε ἡ σκέψη νά γράψω τήν παρούσα ἐργασία.

Πλεῖστα ὅμως προβλήματα τῆς ζωῆς μοῦ ἔτρωγαν τό χρόνο μου. Ἀλλά τελικά ἔδωσα ἓνα μερίδιο καί στά Μαθηματικά.

Βέβαια δέν μοῦ ἔλειπε ὁ ἀέρας τοῦ συγγραφέα, ἀφοῦ πρὶν ἀπό εἴκοσι καί πλέον χρόνια δημοσίευσα «Τό πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου ἢ τῶν ἐπαφῶν» (δύο βιβλία) μέ εὐμενέστατες κριτικές μεγάλων ὀνομάτων ὅπως τῶν Δημ. Κάππου, Μαυρ. Μπρίκα, Εὐαγ. Σταμάτη. Οὔτε ἡ πείρα μου στά Ἀνώτερα Μαθηματικά εἶναι λίγη. Εἴκοσι καί πλέον χρόνια τώρα τά διδάσκω (Κ.Α.Τ.Ε. - Κ.Α.Τ.Ε.Ε. - Τ.Ε.Ι.). Ἀλλά καί στή Μέση Ἑκπαίδευση ἐπὶ δεκατρία ἔτη παλαιότερα πέρασαν ἀπ' τήν πλάτη μου ὅλα τά ἐκπαιδευτικά προγράμματα τῶν Μαθηματικῶν.

Στήν παρούσα ἐργασία ἔβαλα τόν τίτλο «Συγγενεῖς συναρτήσεις», διότι οἱ συναρτήσεις ψ_1 καί ψ_2 συγγενεύουν πράγματι, ἡ μία γεννάει τήν ἄλλη. Παρατηρεῖται ἓνα γενεαλογικό δένδρο.

Ὠνόμασα τίς ἐνότητες πακέτα, γιατί πράγματι οἱ ψ_1, ψ_2 «πᾶνε κουτί», πᾶνε πακέτο, σέ κάθε ἐνότητα.

Ἔθεσα καινούργιους ὅρους (συγγνώμην γι' αὐτό), γιατί βρῆκα καινούργια πράγματα καί ἔπρεπε νά δάλω καινούργια ὀνόματα, γιά νά συνεννοοῦμαι μέ τόν ἑαυτό μου στή λύση τῶν πακέτων.

«Ὠργωσα» θαθειά καί μάζεψα ὅ,τι προλάβαινα μέσα στόν «κῆπο» τῆς Μαθηματικῆς Ἑπιστήμης. Ὑπάρχει δέ πλούσιο «ἔδαφος» γιά «καλλιέργεια» καί ἔρευνα· ἀλλά καί γιά θαυμασμό.

Ἐθαύμασα γιά πολλοστή φορά τοὺς πρωτεργάτες τῶν ἀκριδῶν ἐπιστημῶν, πού μέ τή θαυμαστή διάνοιά τους καί ἐργατικότητα βρῆκαν καί παρέδωσαν στήν ἀνθρωπότητα «ἐργαλεῖα» ἀξιοθαύμαστα γιά τήν πρόοδο τοῦ ἀνθρώπου.

Ἐθαύμασα τόν μικρό θεό, πού λέγεται ἄνθρωπος καί εἶναι ἀσταμάτητος στήν ἐνεργητικότητα, ἅπληστος στήν ἀναζήτηση τῆς γνώσεως, ἀξιολύπητος στόν πόθο γιά ἀνάπαυση.

Ἐθαύμασα τήν ὁμορφὴ μαθηματικὴ πλοκὴ τοῦ Γεωμετρικοῦ Κόσμου, ἀλλά καί τίς παραξενιές του. Στή λύση τῶν προβλημάτων ἄλλα περίμενε ὁ νοῦς μου κι ἄλλα ἀντιμετώπισε μέ τή βοήθεια τῶν «ἐργαλείων» πού μᾶς ἄφησαν οἱ σοφοί.

Πολύ ὁμορφος ὁ κόσμος τῆς ὕλης! " Ἀχ, νά ἦταν ἔτσι καί τῆς ψυχῆς!...

Λίγα μόνο πακέτα παρουσιάζω:

Στό πρῶτο δίδεται ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς $\psi_1 = f(x)$ καί μέ λιγοστά δεδομένα (πού ἀναπτύσσονται στή θεωρία) κάνομε τή γραφικὴ παράσταση τῆς $\psi_2 = \psi_1^2$.

Στό δεύτερο πακέτο: Ἐκ τῆς ψ_1 , ὁμοίως, προκύπτει ἡ $\psi_2 = e^{\psi_1}$.

Στό τρίτο πάλι: ἐκ τῆς ψ_1 , ἡ $\psi_2 = \ln |\psi_1|$. Καί,

Στό τέταρτο δίδεται γραφικῶς ἡ ψ_1 καί κάνομε τήν $\psi_2 = 1/\psi_1$.

Πατήρηση - σχόλιο: Τούς ἀριθμούς α/β , β/α ὀνομάζομε ἀντιστρόφους (δέν μιλάμε ἐδῶ αὐστηρά, καθὼς καί στό διδλίο). Ἐπίσης, τίς συναρτήσεις $\psi_1 = f(x)$ καί $\psi_2 = f^{-1}(x)$ ὀνομάζομε ἀντίστροφες πάλι. Πράγματι κάποια ἀντιστροφή γίνεται καί στίς δύο περιπτώσεις, μέ τόν μηχανισμό τῆς καθεμιάς.

Σύγχυση δέ ἐπέρχεται ὅχι μόνο στόν διδασκόμενο, ἀλλά καί στόν διδάσκοντα. Νομίζω πῶς τό ὄνομα ἀνήκει σ' αὐτόν πού γεννήθηκε πρῶτος· στόν ἀριθμό.

Τελικά τίς συναρτήσεις $\psi_1, \psi_2 = 1/\psi_1$ τίς κατέταξα στίς «συγγενεῖς συναρτήσεις».

Τά σχήματα, γενικῶς, εἶναι καλά. Θά μπορούσα δέ νά τά κάνω καλλίτερα. Ἀλλά προγραμματίζα νά «συνεργαστῶ» μέ τόν computer καί νά τά κάνει ἐκεῖνος καλλίτερα. Ὁ computer ὅμως ἦταν ἀκριβός καί τελικῶς δέν «συνεργάστηκα» μαζί του! Γι' αὐτό καί δημοσίευσά τήν ἐργασία μου «τῇ ἰδίᾳ χειρὶ»! " Ἀς εἶναι ἔτσι. Χαίρομαι πού παραδίδω τό πόνημά μου στήν Ἐπιστήμη.

Ἀπ' αὐτὴ τήν ἐργασία θά προκύπτουν νέες ἀσκήσεις· καί θά γίνει βοήθημα γιά νέες ἐργασίες.

Πολλοί θά ὠφεληθοῦν πολὺ· καί θά διευκολυνθοῦν σέ πολλὰ.

Ὁ ὑποψήφιος ἀνωτάτων σχολῶν θά κατανοήσῃ πολλὰ· ὁ δέ σπουδαστὴς καί φοιτητὴς, θά διεισδύσῃ βαθύτερα στή Μαθηματικὴ Ἀνάλυση. Καί ὁ καθηγητὴς, ὁ ἐρευνητὴς, ὁ φροντιστὴς θά ἐπιταχύνῃ τήν ἐργασία του καί θά κατασκευάζῃ νέες ἀσκήσεις.

Ἐσφαλῶς δέν εἶναι ἀπίθανο καί γιά τόν Μαθηματικό - συγγραφέα νά τοῦ ἀνακαλύπτουν λάθη. Τά Μαθηματικά εἶναι «ἐν οὐ παικτοῖς», εἶναι χάος. Καί ὁ συγγραφέας χαίρεται ὅταν συναντηθεῖ, μέσα στόν Παράδεισο τῶν σχημάτων, μέ ἕνα ἄλλο «περιπατητή» πού θά τοῦ εἰπεῖ: φοίταξε, φίλε, αὐτό τό «δρομάκι» δέν παεῖ στό σύν ἄπειρο, ἀλλά στό πλήν. Εὐκαιρία γιά συζήτηση.

Ὅσο γιά τό γλωσσικό, χίλια συγγνώμην. Κι ἐγώ βλέπω τόν ἑαυτό μου πόσο ἀλλοτριώθηκε, ὅταν διαβάζω «Τό πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου», πού τό ἔγραψα πρίν 23 χρόνια.

Παραδίδω τήν ἐργασία μου στήν ἐπιείκεια τῶν εἰδικῶν.

Πάτρα 25 Μαρτίου 1994

Ἀναστάσιος Φιλ. Περιστερόπουλος

Ὑστερόγραφο: Πολλοί μοῦ εἶπαν (ἀκόμα καί ἡ Μαρίτσα) πώς τό τυπογραφικό στοιχεῖο εἶναι γράμμα οὐδέτερο, εἶναι ψυχρό, νεκρό, ἄψυχο. Ἐνῶ τοῦ χειροῦ τό γράμμα εἶναι ζωντανό· αἰσθάνεσαι τό δάσκαλο δίπλα σου, αἰσθάνεσαι τή λαλιά του.

Γι' αὐτό, τελικά ἀποφάσισα ἔτσι.



Ἀπεικόνισις τῆς πληροφορίας τοῦ Βιτρουβίου (Archit. VI Πρόλογος) καθ' ἣν ὁ Σωκρατικὸς φιλόσοφος Ἀρίστιππος ναυαγῆσας ἐξῆλθεν εἰς ἀγνωστον νῆσον, ὅπου ἀνέδρε γεωμετρικὰ σχήματα καὶ καθυσύχασε τοὺς συντρόφους του εἰπὼν ὅτι ἡ νῆσος κατοικεῖται ἀπὸ πολιτισμένους ἀνθρώπους (τὰ αὐτὰ λέγει καὶ ὁ Κικέρων διὰ τὸν Πλάτωνα De rep 17, 19).

ΠΡΩΤΟ ΠΑΚΕΤΟ
ΣΥΓΓΕΝΕΙΑ ΤΩΝ $y_1 = f(x)$, $y_2 = [f(x)]^2$

§1. Είναι πάντοτε $y_2 = [f(x)]^2 \geq 0$.

§2. α) Αν $f(x_k) = 0 \leadsto [f(x_k)]^2 = 0$. Δηλ. η ρίζα της y_1 είναι και της y_2 (ωσπληροῦν). Καί ἀντιστρόφως.

β) Αν $0 < f(x) < 1 \leadsto f^2 < 1^2 = 1$. Ἐπίσης, $f^2 < f$. Ἦτοι:

$$f^2 < f < 1$$

γ) Αν $f(x_k) = 1 \leadsto f^2(x_k) = 1^2 = 1$. Δηλ., ἂν ἡ y_1 περνάει ἀπὸ τὸ σημεῖο $M(x_k, 1)$, τότε καὶ ἡ y_2 περνάει ἀπὸ αὐτό.

δ) Αν $1 < f(x) \leadsto 1 < f^2$. Ἐπίσης, $f < f^2$. Ἦτοι:

$$1 < f < f^2$$

ε) Αν $-1 < f(x) < 0 \leadsto 0 < -f(x) < 1$. Δηλ. ἡ θ' περιώτρηση. Ὡστότε: $(-f)^2 < 1^2 = 1 \leadsto f^2 < 1$. Ἐπίσης, $(-f)(-f) < -f \leadsto f^2 < -f$. Ἦτοι:

$$f^2 < -f < 1 \quad \text{ἢ} \quad f^2 < |f| < 1$$

στ) Αν $f(x_k) = -1 \leadsto [f(x_k)]^2 = +1$. Δηλ., ἂν ἡ y_1 περνάει ἀπὸ τὸ σημεῖο $M(x_k, -1)$, τότε ἡ y_2 περνάει ἀπὸ τὸ $M'(x_k, +1)$.

ζ) Αν $f(x) < -1 \leadsto 1 < -f$. Δηλ. ἡ δ' περιώτρηση. Ὡστότε: $1^2 < (-f)^2 \leadsto 1 < f^2$ καὶ $-f < (-f)(-f) \leadsto$

$-f < f^2$. "Ητοι:

$$\boxed{1 < -f < f^2} \quad \text{ή} \quad \boxed{1 < |f| < f^2}$$

η) "Αν $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \leadsto \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^2 = +\infty$. Και αν

$\lim_{x \rightarrow x_k} f(x) = \pm\infty \leadsto \lim_{x \rightarrow x_k} f^2 = +\infty$. Δηλ., η ασύμπτωτος $x = x_k$ τής y_1 είναι ασύμπτωτος και τής y_2 .

θ) "Αν $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \leadsto \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f^2 = a^2$. Δηλ., αν η y_1 έχει ασύμπτωτο τήν $y = a$, τότε η y_2 έχει ασύμπτωτο τήν $y = a^2$.

ι) "Εστω ότι η $y_1 = f(x)$ έχει ωραγία ασύμπτωτο τήν $y = kx + \beta$, με $R \ni k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, τότε είναι: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{[f(x)]^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f}{x} \cdot f \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = k \cdot \infty = \pm\infty$. Άρα, η y_2 πο-
τε δεν έχει ασύμπτωτο ωραγία.

§ 3. Είναι: $y_2' = (f^2)' = 2ff'$ και $y_2'' = 2(f'f' + ff'')$. "Ητοι:

$$\boxed{y_2' = 2ff'} \quad (1)$$

$$\boxed{y_2'' = 2(f'^2 + ff'')} \quad (2)$$

(I). "Αν $f'(x_k) = 0 \leadsto y_1$ έχει άκρότατα ή σ.κ. (σημεία καμπής). Έν τών (1), (2) $\leadsto$

$$\boxed{y_2' = 2 \cdot f \cdot 0 = 0} \quad (1')$$

$$\boxed{y_2'' = 2(0^2 + ff'') = 2ff''} \quad (2')$$

Είναι:

α) Μέ $f > 0 \mid x \in \omega \epsilon \rho \iota \sigma \chi \eta \ x_k$.

α₁) $f'' > 0 \rightarrow y_1$ έχει min στο σημείο $M[x_k, f(x_k)]$.

Άρα $y_2'' = 2ff'' > 0 \rightarrow y_2$ έχει και αυτή min στο $M'[x_k, (f(x_k))^2]$.

α₂) $f'' < 0 \rightarrow y_1$ έχει max. Άρα $y_2'' = 2ff'' < 0 \rightarrow y_2$ έχει και αυτή max.

α₃) $f'' = 0 \rightarrow y_1$ έχει σ.υ. (μέ $f''' \neq 0$). Άρα $y_2'' = 2ff'' = 2 \cdot f \cdot 0 = 0 \rightarrow y_2$ έχει σ.υ. (μέ $y_2''' \neq 0$) τής αυτής στροφής, βάσει τών α₁, α₂.

Συμείωση: Άλλήν είναι $y_2''' \neq 0$, διότι: $y_2''' = (y_2'')' = [2(f' + ff'')] = 2(2f'f'' + f'f'' + ff''') = 2(3f'f'' + ff''') = 2(3 \cdot 0 \cdot 0 + ff''') = 2ff''' \neq 0$, αφού $f''' \neq 0$.

β) Μέ $f < 0$:

β₁) $f'' > 0 \rightarrow y_1$ έχει min στο σημείο $M[x_k, f(x_k) < 0]$.

Άρα $y_2'' = 2ff'' < 0 \rightarrow y_2$ έχει max στο $M'[x_k, (f(x_k))^2 > 0]$.

β₂) $f'' < 0 \rightarrow y_1$ έχει max. Άρα $y_2'' = 2ff'' > 0 \rightarrow y_2$ έχει min.

β₃) $f'' = 0 \rightarrow y_1$ έχει σ.υ. (μέ $f''' \neq 0$). Άρα $y_2'' = 2ff'' = 2 \cdot f \cdot 0 = 0 \rightarrow y_2$ έχει σ.υ. (μέ $y_2''' \neq 0$, βλέπε § 3, I, α₃ σημείωση) αντιθέτως στροφής, βάσει τών β₁, β₂.

γ) Μέ $f(x_k) = 0$ (ρίξη ωρρηωρή).

Βάσει τών α, β έχουμε πάντοτε min τής y_2 στο σημείο $M(x_k, 0)$.

II. Αν $f'(x_k) \neq 0$ και $\infty \rightarrow y_1$ δεν έχει άκρότατα. Είναι:

α) Μέ $f > 0 \mid x \in \omega \epsilon \rho \iota \sigma \chi \eta \ x_k$.

$\alpha_1) f'' > 0 \rightarrow y_1$ κοίμη και $y_2' = 2ff' \neq 0 \rightarrow y_2$ δεν έχει
 άυρότατα και $y_2'' = 2(f'^2 + ff'') > 0 \rightarrow y_2$ κοίμη και αυτή.

$\alpha_2) f'' < 0 \rightarrow y_1$ κυρτή και $y_2' = 2ff' \neq 0 \rightarrow y_2$ δεν έχει
 άυρότατα και $y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = \ll \nu\acute{o}\theta' \acute{\epsilon}\xi\acute{\epsilon}\tau\alpha\sigma\iota\nu \gg$. Όωότε:

$\alpha_{21})$ Αν $f'^2 + ff'' > 0 \rightarrow y_2'' = 2(f'^2 + ff'') > 0 \rightarrow y_2$ κοίμη.

$\alpha_{22})$ Αν $f'^2 + ff'' < 0 \rightarrow y_2'' = 2(f'^2 + ff'') < 0 \rightarrow y_2$ κυρτή.

$\alpha_{23})$ Αν $f'^2 + ff'' = 0 \rightarrow y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 0 \rightarrow y_2$ έχει σ.υ.
 μέ ωλάγια κλίση. Μέ $[f'(x_0^+) + f(x_0^+)f''(x_0^+)] \cdot [f'(x_0^-) + f(x_0^-)f''(x_0^-)] < 0$.

$\alpha_3) f'' = 0 \rightarrow y_1$ έχει σ.υ. μέ ωλάγια κλίση και $y_2' =$
 $= 2ff' \neq 0 \rightarrow y_2$ δεν έχει άυρότατα και $y_2'' = 2(f'^2 + ff'') =$
 $= 2f'^2 > 0 \rightarrow y_2$ κοίμη.

$\beta) \text{ Μέ } f < 0 :$

$\beta_1) f'' > 0 \rightarrow y_1$ κοίμη και $y_2' = 2ff' \neq 0 \rightarrow y_2$ δεν έχει
 άυρότατα και $y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = \ll \nu\acute{o}\theta' \acute{\epsilon}\xi\acute{\epsilon}\tau\alpha\sigma\iota\nu \gg$. Όωότε:

$\beta_{11})$ Αν $f'^2 + ff'' > 0 \rightarrow y_2'' = 2(f'^2 + ff'') > 0 \rightarrow y_2$ κοίμη.

$\beta_{12})$ Αν $f'^2 + ff'' < 0 \rightarrow y_2'' = 2(f'^2 + ff'') < 0 \rightarrow y_2$ κυρτή.

$\beta_{13})$ Αν $f'^2 + ff'' = 0 \rightarrow y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 0 \rightarrow y_2$ έχει σ.υ.
 μέ ωλάγια κλίση. Μέ $[f'(x_0^+) + f(x_0^+)f''(x_0^+)] [f'(x_0^-) + f(x_0^-)f''(x_0^-)] < 0$.

$\beta_2) f'' < 0 \rightarrow y_1$ κυρτή και $y_2' = 2ff' \neq 0 \rightarrow y_2$ δεν έχει
 άυρότατα και $y_2'' = 2(f'^2 + ff'') > 0 \rightarrow y_2$ κοίμη.

$\beta_3) f'' = 0 \rightarrow y_1$ έχει σ.υ. μέ ωλάγια κλίση και $y_2' =$
 $= 2ff' \neq 0 \rightarrow y_2$ δεν έχει άυρότατα και $y_2'' = 2(f'^2 + ff'') =$
 $= 2f'^2 > 0 \rightarrow y_2$ κοίμη.

δ) Με $f(x_k) = 0$ (x_k ρίζα άωστη)

δ₁) $f'' > 0 \leadsto y_1$ κοίτη και $y_2'(x_k) = 2ff' = 2 \cdot 0 \cdot f' = 0$,

$y_2''(x_k) = 2(f'^2 + ff'') = 2(f'^2 + 0 \cdot f'') = 2f'^2 > 0$. Άρα y_2 έχει min.

δ₂) $f'' < 0 \leadsto y_1$ κυρτή και $y_2'(x_k) = 2ff' = 2 \cdot 0 \cdot f' = 0$,

$y_2'' = 2f'^2 > 0$. Άρα y_2 έχει min.

δ₃) $f'' = 0 \leadsto y_1$ έχει σ.κ. με άβραχια κλίση και $y_2'(x_k) = 2 \cdot 0 \cdot f' = 0$, $y_2''(x_k) = 2(f'^2 + ff'') = 2(f'^2 + 0 \cdot 0) = 2f'^2 > 0$. Άρα y_2 έχει min.

Σημείωση: Στις περιπτώσεις δ₁, δ₂, δ₃, και θεωρώντας να είναι η f , με σύνоро το x_k , τότε min θα έχουμε για την y_2 .

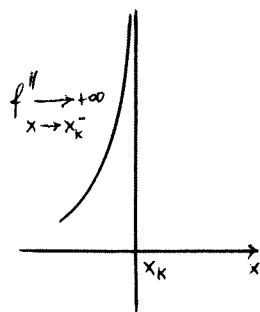
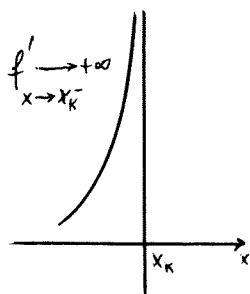
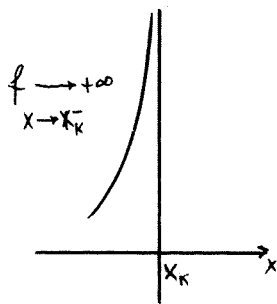
III. Αν $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} \infty$.

α) $f' \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} +\infty$.

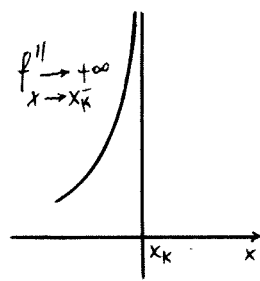
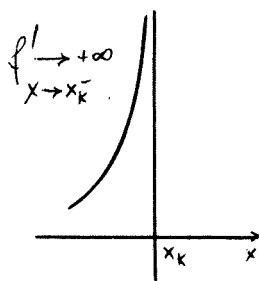
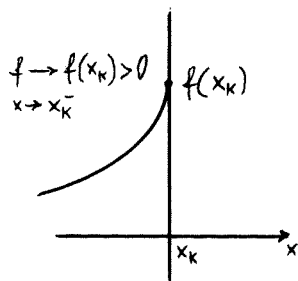
α₁) $f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} +\infty$. Στο σχήμα α₁ δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των f , f' , f'' . Είναι: $y_2' = 2ff' = 2 \cdot (+\infty)(+\infty) = +\infty \leadsto y_2 \uparrow$. Εξάισως, $y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(+\infty)^2 + (+\infty)(+\infty)] = +\infty \leadsto y_2$ κοίτη, όπως και η y_1 , με $y_2 = y_1^2 \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} +\infty$.

Σημείωση: Είναι (σελ. 9, § 2, δ): $f < f' \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} +\infty$.

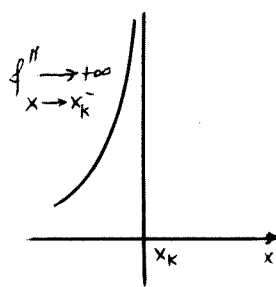
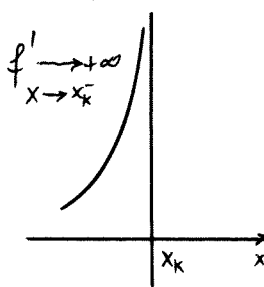
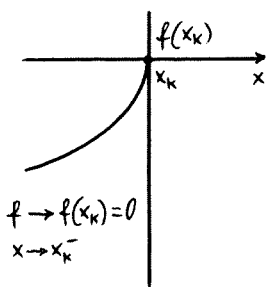
α₂) $f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} f(x_k) > 0$, σ.κ. α₂. Είναι: $y_2' = 2ff' = 2 \cdot f(x_k)(+\infty) = +\infty \leadsto y_2 \uparrow$. Εξάισως, $y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(+\infty)^2 + f(x_k)(+\infty)] = +\infty \leadsto y_2$ κοίτη, όπως και η y_1 , με $y_2 = y_1^2 \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} [f(x_k)]^2$.



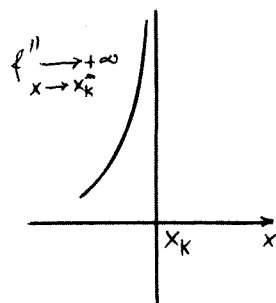
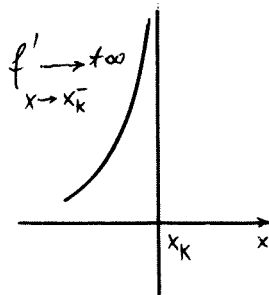
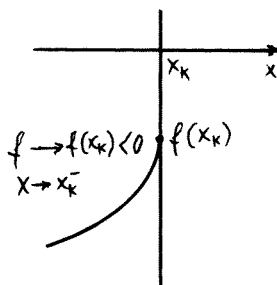
$\Sigma x. a_1$



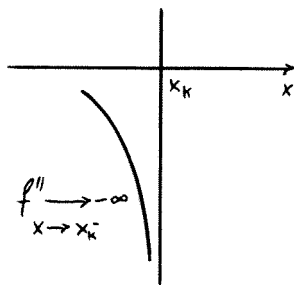
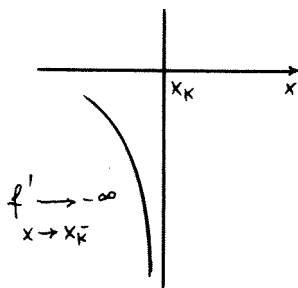
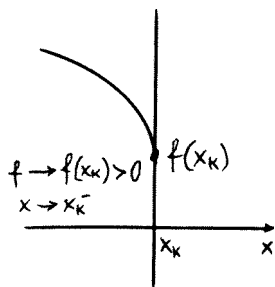
$\Sigma x. a_2$



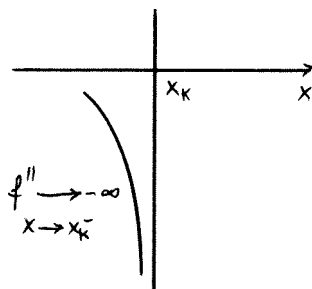
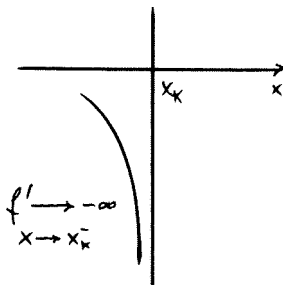
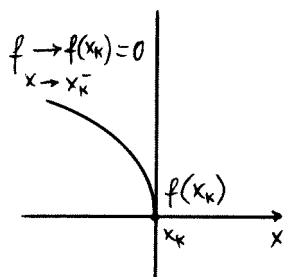
$\Sigma x. a_3$



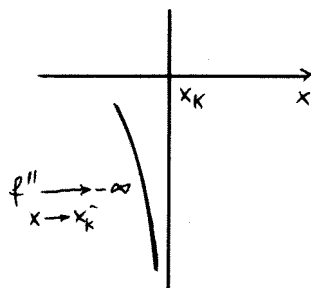
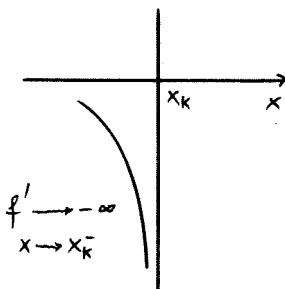
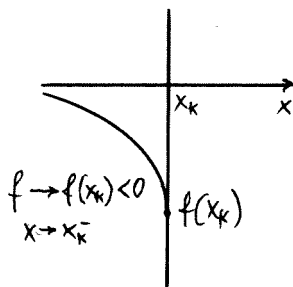
$\Sigma x. a_4$



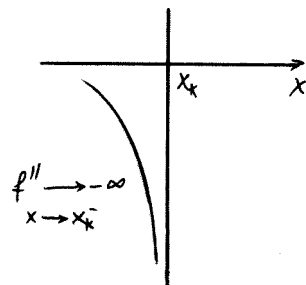
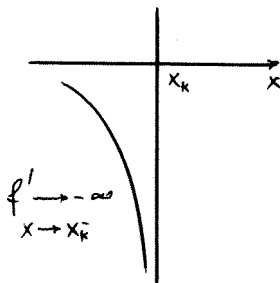
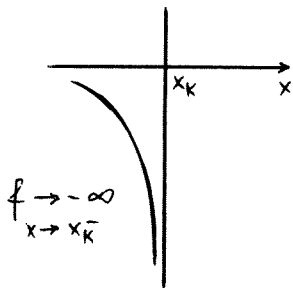
$\Sigma x. \theta_1$



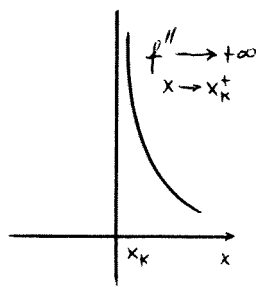
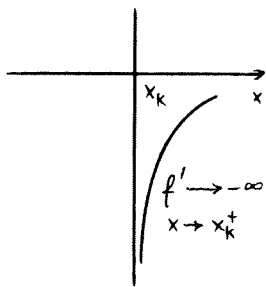
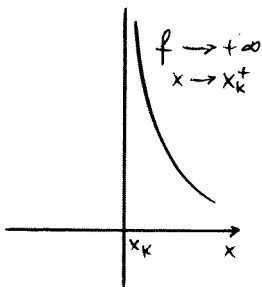
$\Sigma x. \theta_2$



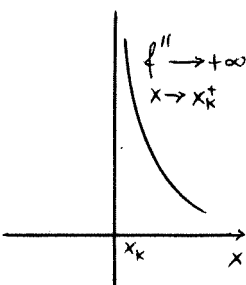
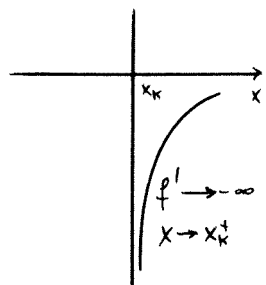
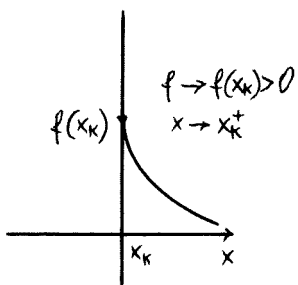
$\Sigma x. \theta_3$



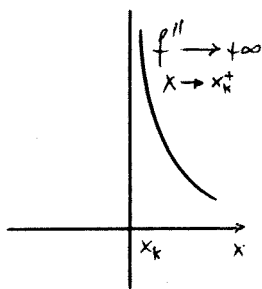
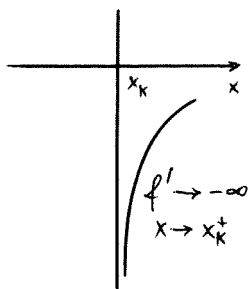
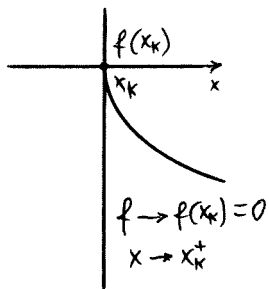
$\Sigma x. \theta_4$



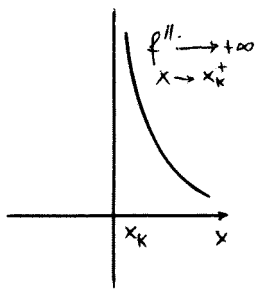
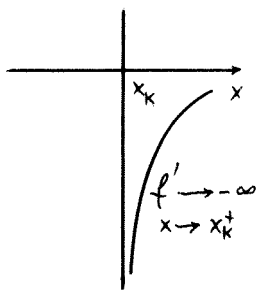
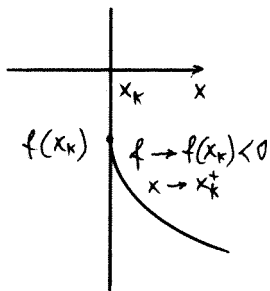
$\Sigma x. \delta_1$



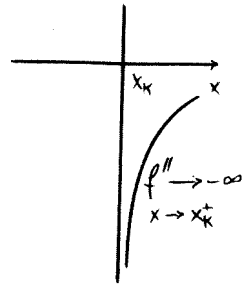
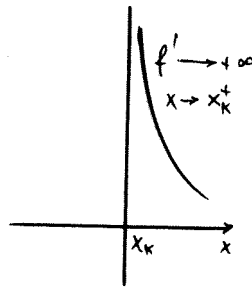
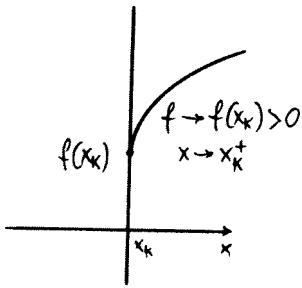
$\Sigma x. \delta_2$



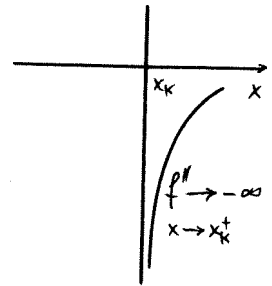
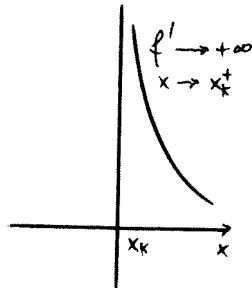
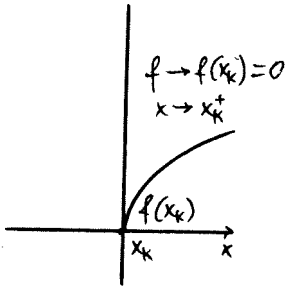
$\Sigma x. \delta_3$



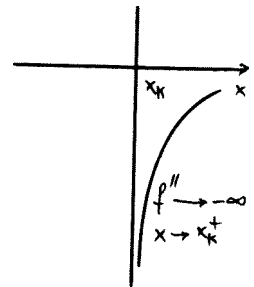
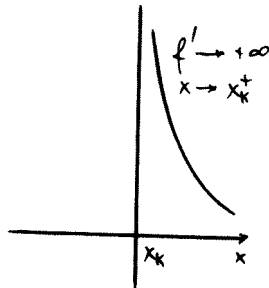
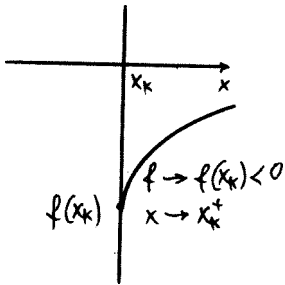
$\Sigma x. \delta_4$



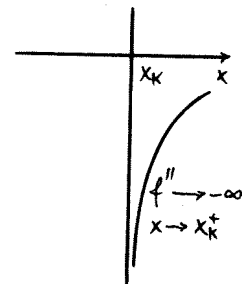
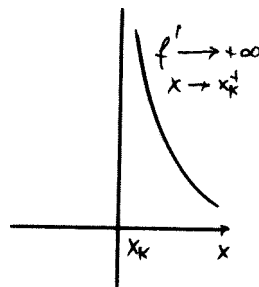
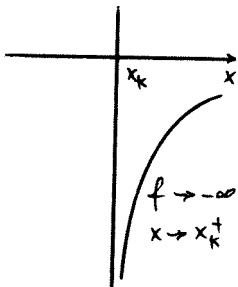
$$\Sigma x \cdot \delta_1$$



$$\Sigma x \cdot \delta_2$$



$$\Sigma x \cdot \delta_3$$



$$\Sigma x \cdot \delta_4$$

$$\alpha_3) f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} f(x_k) = 0, \text{ σχ. } \alpha_3. \text{ Είναι: } y_2' = 2ff' = 2f(x_k) \cdot (+\infty) = 0^+ \cdot (+\infty) = \text{άωροςσδιόριστος μορφή} = A, \text{ όπου } -\infty \leq A \leq 0. \text{ Άλλα } f \rightarrow 0^-, f' \rightarrow +\infty \leadsto ff' < 0 \leadsto y_2 \downarrow. \text{ Έωςίς, } y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(+\infty)^2 + 0^+ \cdot (+\infty)] = \text{άωροςσδιόριστος μορφή (θάμε με Hospital)}. \text{ } y_2 \downarrow.$$

$$\alpha_4) f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} f(x_k) < 0, \text{ σχ. } \alpha_4. \text{ Είναι: } y_2' = 2ff' = 2f(x_k) \cdot (+\infty) = -\infty \leadsto y_2 \downarrow. \text{ Έωςίς, } y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(+\infty)^2 + f(x_k) \cdot (+\infty)] = 2[+\infty - \infty] = \text{άωροςσδιόρ. μορφή, u.g.w.}$$

$$\beta) f' \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} -\infty.$$

$$\beta_1) f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} f(x_k) > 0, \text{ σχ. } \beta_1. \text{ Είναι: } y_2' = 2ff' = 2 \cdot f(x_k) \cdot (-\infty) = -\infty \leadsto y_2 \downarrow. \text{ Έωςίς, } y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(-\infty)^2 + f(x_k) \cdot (-\infty)] = 2(+\infty - \infty) = \text{άωροςσδιόριστος μορφή, u.g.w.}$$

$$\beta_2) f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} f(x_k) = 0, \text{ σχ. } \beta_2. \text{ Είναι: } y_2' = 2ff' = 2 \cdot f(x_k) \cdot (-\infty) = 2 \cdot 0^+ \cdot (-\infty) = \text{άωροςσδιόρ. μορφή} = A, \text{ όπου } -\infty \leq A \leq 0. \text{ Άλλα } f \rightarrow 0^+, f' \rightarrow -\infty \leadsto ff' < 0 \leadsto y_2 \downarrow. \text{ Έωςίς, } y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(-\infty)^2 + 0^+ \cdot (-\infty)] = 2[(-\infty)^2 + 0^+ \cdot (-\infty)] = \text{άωροςσδιόρ. μορφή, u.g.w.}$$

$$\beta_3) f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} f(x_k) < 0, \text{ σχ. } \beta_3. \text{ Είναι: } y_2' = 2ff' = 2 \cdot f(x_k) \cdot (-\infty) = +\infty \leadsto y_2 \uparrow. \text{ Έωςίς, } y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(-\infty)^2 + f(x_k) \cdot (-\infty)] = 2(+\infty + \infty) = +\infty \leadsto y_2 \text{ κοίτη, ενώ η } y_1 \text{ είναι κυρτή, με } y_2 = y_1^2 \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} [f(x_k)]^2 > 0.$$

$$\beta_4) f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} -\infty, \text{ σχ. } \beta_4. \text{ Είναι: } y_2' = 2 \cdot f \cdot f' = 2(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty \leadsto y_2 \uparrow. \text{ Έωςίς, } y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(-\infty)^2 + (-\infty) \cdot (-\infty)] = 2(+\infty + \infty) = +\infty \leadsto y_2 \text{ κοίτη, ενώ η } y_1 \text{ είναι κυρτή, με } y_2 = y_1^2 \xrightarrow{x \rightarrow x_k^-} +\infty.$$

Σημείωση: Είναι (σελ. 9, § 2, 3): $|f| < f^2 \xrightarrow{x \rightarrow x_k} +\infty.$

$$\gamma) f' \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} -\infty.$$

$$\gamma_1) f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} +\infty, \text{ σχ. } \gamma_1. \text{ Εἶναι: } y_2' = 2ff' = 2(+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\leadsto y_2 \downarrow. \text{ Εἰς ὅς, } y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(-\infty)^2 + (+\infty)(+\infty)] =$$

$$= 2(+\infty + \infty) = +\infty \leadsto y_2 \text{ κοίτη, ὡς καὶ ἡ } y_1, \text{ μὲν } y_2 = y_1^2 \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} +\infty.$$

Συμπέρασμα: Εἶναι (σε 1. γ, δ 2, δ): $f < f^2 \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} +\infty$.

$$\gamma_2) f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} f(x_k) > 0, \text{ σχ. } \gamma_2. \text{ Εἶναι: } y_2' = 2ff' = 2 \cdot f(x_k)(-\infty) = -\infty$$

$$\leadsto y_2 \downarrow. \text{ Εἰς ὅς, } y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(-\infty)^2 + f(x_k)(+\infty)] = 2(+\infty + \infty) =$$

$$= +\infty \leadsto y_2 \text{ κοίτη, ὡς καὶ ἡ } y_1, \text{ μὲν } y_2 = y_1^2 \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} [f(x_k)]^2.$$

$$\gamma_3) f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} f(x_k) = 0, \text{ σχ. } \gamma_3. \text{ Εἶναι: } y_2' = 2ff' = 2 \cdot f(x_k)(-\infty) =$$

$$= 2 \cdot 0^-(-\infty) = \text{ἄωροσδ. μορφή} = A, \text{ ὅπου } 0 \leq A \leq +\infty. \text{ Ἀλλὰ } f \rightarrow 0^-, f' \rightarrow -\infty \leadsto ff' > 0 \leadsto y_2 \uparrow. \text{ Εἰς ὅς, } y_2'' = 2(f'^2 + ff'') =$$

$$= 2[(-\infty)^2 + 0^-(+\infty)] = \text{ἄωροσδ. μορφή, u. j. ω.}$$

$$\gamma_4) f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} f(x_k) < 0, \text{ σχ. } \gamma_4. \text{ Εἶναι: } y_2' = 2ff' = 2 \cdot f(x_k)(-\infty) =$$

$$= +\infty \leadsto y_2 \uparrow. \text{ Εἰς ὅς, } y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(-\infty)^2 + f(x_k)(+\infty)] =$$

$$= 2(+\infty - \infty) = \text{ἄωροσδ. μορφή, u. j. ω.}$$

$$\delta) f' \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} +\infty.$$

$$\delta_1) f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} f(x_k) > 0, \text{ σχ. } \delta_1. \text{ Εἶναι: } y_2' = 2ff' = 2 \cdot f(x_k)(+\infty) =$$

$$= +\infty \leadsto y_2 \uparrow. \text{ Εἰς ὅς, } y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(+\infty)^2 + f(x_k)(-\infty)] =$$

$$= 2(+\infty - \infty) = \text{ἄωροσδ. μορφή, u. j. ω.}$$

$$\delta_2) f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} f(x_k) = 0, \text{ σχ. } \delta_2. \text{ Εἶναι: } y_2' = 2ff' = 2 \cdot f(x_k)(+\infty) =$$

$$= 2 \cdot 0^+(+\infty) = \text{ἄωροσδ. μορφή} = A, \text{ ὅπου } 0 \leq A \leq +\infty. \text{ Ἀλλὰ } f \rightarrow 0^+, f' \rightarrow +\infty \leadsto ff' > 0 \leadsto y_2 \uparrow. \text{ Εἰς ὅς, } y_2'' = 2(f'^2 + ff'') =$$

$$= 2[(+\infty)^2 + 0^+(-\infty)] = \text{ἄωροσδ. μορφή, u. j. ω.}$$

$$\delta_3) f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} f(x_k) < 0, \text{ οχ. } \delta_3. \text{ Είναι: } y_2' = 2ff' = 2 \cdot f(x_k)(+\infty) = -\infty \rightsquigarrow y_2 \downarrow. \text{ Έτσι, } y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(+\infty)^2 + f(x_k)(-\infty)] = 2(+\infty + \infty) = +\infty \rightsquigarrow y_2 \text{ κοίμη, ενώ η } y_1 \text{ είναι κυρτή, με } y_2 = y_1^2 \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} [f(x_k)]^2 > 0.$$

$$\delta_4) f \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} -\infty, \text{ οχ. } \delta_4. \text{ Είναι: } y_2' = 2ff' = 2 \cdot (-\infty)(+\infty) = -\infty \rightsquigarrow y_2 \downarrow. \text{ Έτσι, } y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(+\infty)^2 + (-\infty)(-\infty)] = 2(+\infty + \infty) = +\infty \rightsquigarrow y_2 \text{ κοίμη, ενώ η } y_1 \text{ είναι κυρτή, με } y_2 = y_1^2 \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} +\infty.$$

Συμπέρασμα: Είναι (σελ. 9, § 2, 3): $|f| < f^2 \xrightarrow{x \rightarrow x_k^+} +\infty$.

§ 4. ΕΡΩΤΗΜΑ: Ποιά είναι η $y_1 = f(x)$ για την οποία ισχύει $y_2'' = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } y_2'' = (y_2')' = (2ff')' = 0 \rightsquigarrow \frac{d}{dx}(2ff') = 0 \rightsquigarrow 2ff' = C_1 \rightsquigarrow 2f \cdot \frac{df}{dx} = C_1 \rightsquigarrow 2 \int f df = C_1 \int dx + C_2 \rightsquigarrow f^2 = C_1 x + C_2. \text{ Άρα:}$$

$$f(x) = \pm \sqrt{C_1 x + C_2}.$$

Η παραγωγότατα της $y_2 = f^2 = C_1 x + C_2$ είναι μηδέν $\forall x \in \mathbb{R}$, αφού είναι ευθεία γραμμή.

$$\text{§ 5. Αν } y_{1\alpha} = f(x) < 0 \text{ με } \alpha < x < \beta \text{ και } y_{2\alpha} = (y_{1\alpha})^2 = [f(x)]^2 = f^2 \mid_{\alpha < x < \beta}, \text{ τότε, ως γνωστόν είναι } y_{2\alpha}' = 2ff' \text{ και } y_{2\alpha}'' = 2(f'^2 + ff'').$$

$$\text{Αν ωάλι } y_{1\beta} = |y_{1\alpha}| = |f(x)| = |f| = -f \text{ με } \alpha < x < \beta \text{ και } y_{2\beta} = (y_{1\beta})^2 = |f|^2 = f^2, \text{ τότε ωάλι θα είναι } y_{2\beta}' = 2ff' \text{ και } y_{2\beta}'' = 2(f'^2 + ff''), \text{ με } \alpha < x < \beta.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1 Διδομένης τής γραμμής παραστάσεως τής $y_1 = f(x) = x^2 - 1.5$ να γίνει η γραφ. παρασέλιση τής $y_2 = [f(x)]^2 = (x^2 - 1.5)^2$.

Η παραβολή $y_1 = x^2 - 1.5$ τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(-\sqrt{1.5} \approx -1.2, 0)$, $A'(\sqrt{1.5} \approx +1.2, 0)$.

Άλλα τών ρόζο δέν δά τών άξων τής $y_1 = f = x^2 - 1.5$, μή η $y_{1p} = |f| = |x^2 - 1.5|$, (βλέπε § 5, σελ. 98).

Καί τό άρνητικό μέρος τής y_1 , άποσύντασ τό άποστέδει η έσσε-
χημένη γραμμή η όδοία τέμνει τών έυθεία $y = 1$ στα σημεία :

$B(-\sqrt{0.5} \approx -0.7, 1)$, $B'(\sqrt{0.5} \approx +0.7, 1)$

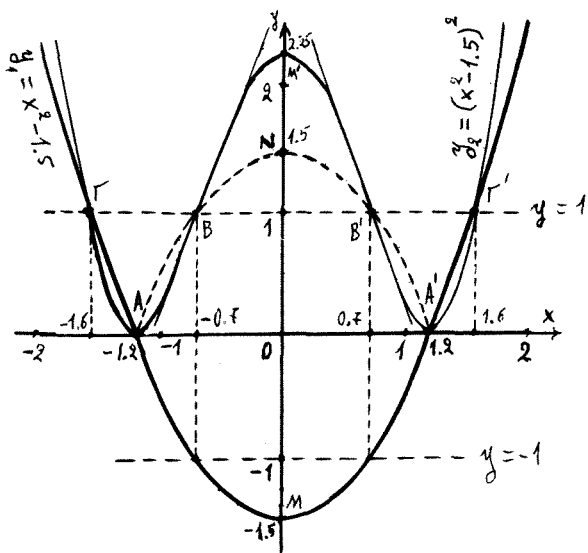
καί τών άξονα τών y στο $N(0, 1.5)$.

Είναι (§ 3, I, θ_1): $f'(x_k = 0) = 0 \leadsto y_1 = x^2 - 1.5$ έχει min στο $M(0, -1.5)$ καί άρα $y_{1p} = |x^2 - 1.5| = -x^2 + 1.5 \mid -1.2 \approx -\sqrt{1.5} < x < +\sqrt{1.5} \approx +1.2$ έχει max στο $N(0, 1.5)$ καί $y_2 = (x^2 - 1.5)^2$ έχει max στο σημείο $M' [x_k = 0, (f(x_k))^2 = (-1.5)^2 = |-1.5|^2 = 1.5^2 = 2.25]$.

Επίσης, (§ 3, II, θ_2) είναι: $y_1 = f = x^2 - 1.5 \mid -1.2 < x < +1.2$, $y_1' = f' = 2x$, $y_1'' = f'' = 2 > 0$ καί $y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2[(2x)^2 + (x^2 - 1.5)2] = 2(6x^2 - 3) = 0 \leadsto x^2 = \frac{3}{6} = 0.5$ ή $x = \pm\sqrt{0.5}$, όποτε $y_2(\pm\sqrt{0.5}) = [(\pm\sqrt{0.5})^2 - 1.5]^2 = (0.5 - 1.5)^2 = 1$. Άρα στα σημεία $B(-\sqrt{0.5} \approx -0.7, 1)$ καί $B'(+\sqrt{0.5} \approx +0.7, 1)$ έχουμε σημεία καμπής.

Επειδή $y_2'' < 0 \mid -0.7 < x < 0.7 \leadsto y_2$ κυρτή καί κοίτη έπρος τών διαστήματος $(-0.7, 0.7)$.

Σημείωση: Σύμπτωση είναι τό ότι τά σημ. η. είναι άκω όσον $y = 1$;



Σχ. 1.

Έως και, $(\delta 2, \varepsilon, \sigma\epsilon, 3)$ είναι: $f^2 < |f| < 1 \mid -1.2 < x < -0.7$,
 $1 < |f| < f^2 \mid -0.7 < x < +0.7$, $f^2 < |f| < 1 \mid 0.7 < x < 1.2$.

Έως και, $(\delta 3, \text{II}, \delta_1) \leadsto$ η y_2 έχει min στα σημεία $A(-\sqrt{1.5} \approx -1.2, 0)$,
 $A'(+\sqrt{1.5} \approx +1.2, 0)$.

Έως και, η y_1 τέμνει τὴν $y=1$ στα σημεία $\Gamma(-\sqrt{2.5} \approx -1.6, 0)$ καὶ
 $\Gamma'(\sqrt{2.5} \approx 1.6, 0)$.

Καὶ είναι $(\delta 2, \theta, \delta, \delta): f^2 < f < 1 \mid -1.6 < x < -1.2$, $1 < f < f^2 \mid$
 $\mid x < -1.6$, $f^2 < f < 1 \mid 1.2 < x < 1.6$ καὶ $1 < f < f^2 \mid 1.6 < x$.

Τό ὅτι η y_2 εἶναι κοίλη στὰ διαστήματα $x < -1.2$ καὶ $1.2 < x$
 φαίνεται καὶ ἀπὸ τὴν $\delta 3, \text{II}, \alpha_1$.

2 Έως και, $y_1 = -x^2 + \theta \mid \theta > 0$, $y_2 = (-x^2 + \theta)^2$.

Ὁ λόγος ἐδῶ, γιὰ τὰ σημεία μακρότερ.

Εἶναι $y_1' = f' = -2x$, $y_1'' = f'' = -2$, $y_2'' = 2(f' + f f'') =$
 $= 2[(-2x)^2 + (-x^2 + \theta)(-2)] = \dots = 4(3x^2 - \theta) = 0 \leadsto x^2 = \frac{\theta}{3} \leadsto$
 $\leadsto x = \pm \sqrt{\frac{\theta}{3}}$, $y_2(\pm \sqrt{\frac{\theta}{3}}) = (-\frac{\theta}{3} + \theta)^2 = \frac{4}{9} \theta^2$. Ἄρα τὰ σ.υ.
 εἶναι $B(-\sqrt{\frac{\theta}{3}}, \frac{4\theta^2}{9})$, $B'(+\sqrt{\frac{\theta}{3}}, \frac{4\theta^2}{9})$, (σ.χ. 1 καὶ 2).

Θὰ ἐμφράσουμε τώρα τὸν γεωμετρικὸ τόπο τῶν σ.υ.
 τῶν y_2 .

Εἶναι: $y_3(\theta) = \frac{4}{9} \theta^2$, $x(\theta) = \pm \sqrt{\frac{\theta}{3}}$ ἢ $x^2 = \frac{\theta}{3}$ ἢ $\theta = 3x^2$
 ἢ $\theta^2 = 9x^4$. Ἀρα $y_3(x) = \frac{4}{9} \cdot 9x^4 = 4x^4$. Ἦτοι ἡ παραγωγὴ
 $y_3 = 4x^4$ εἶναι ὁ γ.τ. τῶν σ.υ. τῶν y_2 .

Ἄν ἀλλά μαζέσουμε $y_4 = \theta = 3x^2$ ἔχουμε τότε τὴν
 τεταγμένη x τοῦ σ.υ. τῆς y_2 ἐν τῇς τεταγμένης $y_4 = \theta$.

Διηλαδῆ: Ἀπὸ τὸ σημεῖο $N(0, \theta)$ φέρω $\parallel$ χ'Οχ ἡ ὁποία
 τέμνει τὴν παραβολὴν $y_4 = 3x^2$ στὸ σημεῖο N' . Ἐν συνεχείᾳ
 ἀπὸ τὸ $N' \perp$ χ'Οχ ἡ ὁποία τέμνει τὴν παραγωγὴν $y_3 = 4x^4$

στο σημείο N' . Αυτό γιγώον το N'' είναι το σημείο καμιάς τής $y_2 = (-x^2 + 2)^2$, το ένα άθ' τὰ δύο.

Σημείωση: Στίν $y_3 = 4x^4$ είναι $1 = 4x^4 \leadsto x_0 = \pm \left(\frac{1}{4}\right)^{1/4} = \pm \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{1/4} = \pm \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$. Καί στίν $y_4(x_0) = 3x_0^2 = 3 \left[\pm \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\right]^2 = \frac{3}{2} = 1.5$.

ΓΕΝΙΚΑ:

"Εστωσαν $y_1 = kx^2 + \lambda$ καί

$$y_2 = (kx^2 + \lambda)^2.$$

α) Αν $k > 0, \lambda \geq 0 \leadsto y_1$ έχει $\min \lambda \geq 0$. δηλ. ή y_1 είναι «πάνω» άθω τόν άξονα των x καί ή y_2 κατασμενάζεται κατὰ τὰ γρασά (θλέω σεγ. 9, 82, α, β, γ, δ, η).

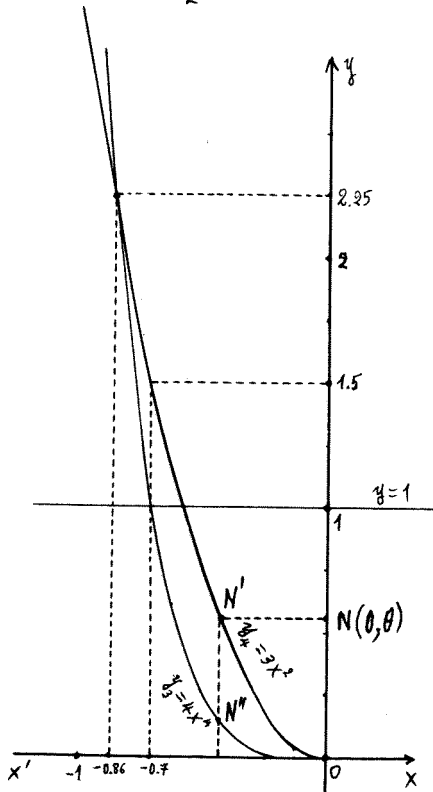
β) Αν $k < 0, \lambda < 0 \leadsto y_1$ έχει $\max \lambda < 0$. δηλ. ή y_1 είναι «κάτω» άθω τόν άξονα των x καί ή y_2 κατασμενάζεται κατὰ τὰ γρασά (σεγ. 9, 82, ε, σε, ζ, η).

γ) $k\lambda < 0$, άθί σηκάνει y_1 κυρή μέ $\max \lambda > 0$ ή κοίλη μέ $\min \lambda < 0$.

"Αν $\lambda < 0, k > 0$, τότε έξεράβουμε τίν $y_{10} = |y_1|$.

Παρκάτω ύποθέσουμε $k < 0, \lambda > 0$.

Στίν θεωρίαση γ έχομε σ.υ. καί έρκαβόμεθα όμοίως:



Σχ. 2.

$$\text{Είναι: } y_1' = f' = 2KX, \quad y_1'' = f'' = 2K < 0, \quad y_2'' = 2(f' + ff'') = \\ = 2 \left[(2KX)^2 + (KX^2 + 1)(2K) \right] = \dots = 4K(3KX^2 + 1) = 0 \leadsto X^2 = -\frac{1}{3K}$$

$$\leadsto x = \pm \sqrt{-\frac{1}{3K}}, \quad y_2 \left(\pm \sqrt{-\frac{1}{3K}} \right) = \left[K \left(\pm \sqrt{-\frac{1}{3K}} \right)^2 + 1 \right]^2 = \dots = \frac{4}{9} K^2$$

Άρα τα σ.μ. είναι $B \left(-\sqrt{-\frac{1}{3K}}, \frac{4K^2}{9} \right)$ και $B' \left(\sqrt{-\frac{1}{3K}}, \frac{4K^2}{9} \right)$.

Θα ευφράσουμε τώρα τον γ.τ. των σ.μ. των y_2 .

$$\text{Είναι: } y_3(x) = \frac{4}{9} K^2, \quad x(x) = \pm \sqrt{-\frac{1}{3K}} \quad \text{ή} \quad x^2 = -\frac{1}{3K} \quad \text{ή} \\ \lambda = -3KX^2 \quad \text{ή} \quad \lambda^2 = 9K^2X^4. \quad \text{Άρα } y_3(x) = \frac{4}{9} \cdot 9K^2X^4 = 4K^2X^4.$$

Ήτοι, η παραγωγή $y_3 = 4K^2X^4$ είναι ο γ.τ. των σ.μ. των y_2 .

Και, $y_4 = \lambda = -3KX^2 > 0$ ή παραβολή. Δηλαδή:

Από το σημείο $N(0, 1)$ φέρω $\parallel x'Ox$ τέμνουσα την $y_4 = -3KX^2$ στο N' . Από το $N' \perp x'Ox$ τέμνουσα την $y_3 = 4K^2X^4$ στο N'' . Το N'' είναι το ένα από τα δύο σημ. μ. της $y_2 = (KX^2 + 1)^2$.

$$\text{Σμείωση: Στις } y_3 = 4K^2X^4 \text{ είναι } 1 = 4K^2X^2 \leadsto x_0 = \pm \left(\frac{1}{4K^2} \right)^{1/4} = \\ = \pm \left(\frac{1}{2^2|K|^2} \right)^{1/4} = \pm \left[\left(\frac{1}{2|K|} \right)^2 \right]^{1/4} = \pm \left(\frac{1}{2|K|} \right)^{1/2}. \text{ Και στις } y_4 = -3KX^2 = \\ = 3(-K)X^2 = 3|K|X^2 \leadsto y_4(x_0) = 3|K| \left[\pm \left(\frac{1}{2|K|} \right)^{1/2} \right]^2 = 3|K| \cdot \frac{1}{2|K|} = \\ = \frac{3}{2} = 1.5.$$

Δηλαδή, όλες οι $y_2 = (KX^2 + 1.5)^2$ με $K < 0$, έχουν τα σ.μ. πάνω στην ευθεία $y = 1$.

$$\text{Είναι δε } x_0 = \pm \left(\frac{1}{2|K|} \right)^{1/2} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{|K|}} \simeq \pm \frac{0.7}{\sqrt{|K|}}$$

ΚΑΤΙ ΑΚΟΜΗ (γενικότερο):

Έστωσαν $y_1 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και $y_2 = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2$.

Είναι: $y_1 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) =$

$$= \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right] = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right] =$$

$$= \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}.$$

Αν θέσουμε $x + \frac{\beta}{2\alpha} = X$, $\alpha = \kappa$, $-\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = \lambda$ και

$$y_1 = Y_1 \rightsquigarrow Y_1 = \kappa X^2 + \lambda \text{ και } y_2 = Y_2 = (\kappa X^2 + \lambda)^2.$$

Δηλ., έχουμε την ωρηγομένη περιέκταση με παράλληλη μετατόπιση όμοιου του άξονα των τετραγώνων επί νέα θέση

$$x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha}.$$

ΚΑΙ ΚΑΤΙ ΑΚΟΜΗ: Έστω η δικευράχων εξίσωση

$$y_2 = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma. \text{ Είναι } y_2 = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = \alpha \left[\left(x^2 + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right] =$$

$$= \left(\sqrt{\alpha} \cdot x^2 + \frac{\beta\sqrt{\alpha}}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} \text{ με } \alpha > 0 \text{ (άλλως λαμβάνουμε την αντίθετη } -y_2 = -\alpha x^4 - \beta x^2 - \gamma) \rightsquigarrow y_2 + \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = \left(\sqrt{\alpha} x^2 + \frac{\beta\sqrt{\alpha}}{2\alpha} \right)^2,$$

$$\text{αν θέσουμε } y_2 + \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = Y_2, \sqrt{\alpha} = \kappa > 0, \frac{\beta\sqrt{\alpha}}{2\alpha} = \lambda \text{ και } x = X \rightsquigarrow Y_2 = (\kappa X^2 + \lambda)^2, \text{ με } Y_1 = \kappa X^2 + \lambda.$$

Δηλ., θαρί τα ίδια με μία παράλληλη μετατόπιση του άξονα των τετραγώνων επί νέα θέση $y_2 = -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$.

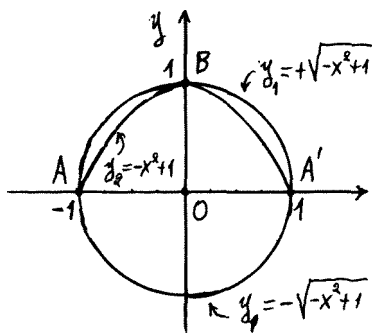
Όστε: αν $\kappa\lambda > 0$, δηλ. $(\sqrt{\alpha}) \left(\frac{\beta\sqrt{\alpha}}{2\alpha} \right) = \frac{\beta}{2} > 0$ ή $\beta > 0$, έχουμε μόνο ένα min της y_2 και αν $\kappa\lambda < 0$, δηλ.

$\beta < 0$, έχουμε δύο min της y_2 . Και αν $\lambda = 0$, δηλ. $\beta = 0$, $\rightsquigarrow$ ένα min.

Η $y = x^4 - 5x^2 + 4$ έχει δύο min διότι $\alpha > 0$ και $\beta < 0$.

3 Έξωδός, $y_1 = \pm\sqrt{-x^2+1} \mid -1 \leq x \leq 1$, $y_2 = y_1^2 = -x^2+1 \mid -1 \leq x \leq 1$

Είναι $x^2 + y_1^2 = 1$, δηλ. κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $R=1$ και $y_2 = -x^2+1$, δηλ. παραβολή.



Σχ. 3.

Έχουμε $y_1' \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \mp \infty$, $y_2' = -2x$
 $\xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -2 < 0 \rightarrow y_2 \downarrow$ (βλέπε σελ.

15, 16, σχ. θ_2, α_3), $y_1' \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \pm \infty$,

$$y_2' = -2x \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} 2 > 0 \rightarrow y_2 \uparrow \text{ (σελ. 17, 16, σχ. } \delta_2, \gamma_3 \text{)}, y_1' = (\pm\sqrt{-x^2+1})' = \frac{\mp x}{\sqrt{-x^2+1}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^\pm} 0^\mp \text{ ή } 0^\pm, y_1'' = \dots = \frac{\mp 1}{(-x^2+1)\sqrt{-x^2+1}}, y_2' = -2x \xrightarrow{x \rightarrow 0^\pm} 0^\mp,$$

$y_2'' = -2 < 0 \rightarrow y_2$ κορυφή, $y_2(0) = \max$ (σελ. 11, §3, I, α_2, β_1 και II $\alpha_{2,2}, \beta_{1,2}$).

Σημείωση I: Ανάλογα έχουμε και για την έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

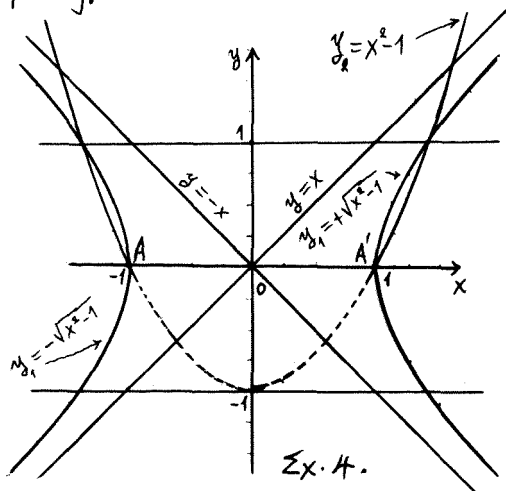
Σημείωση II: Αν στα χρησιμοποιούμενα παραδείγματα την $y_2 = f^2$ παλέσουμε φωνηεντική παραβολή, εδώ την $y_2 = -x^2+1 \mid -1 \leq x \leq 1$ ως παλέσουμε υπερβολική παραβολή ή γενικότερα έλλειψοειδή παραβολή.

4 Έξωδός, $y_1 = \pm\sqrt{x^2-1} \mid$

$$\{x \text{ εκτός του } (-1,1)\} = \Delta, y_2 =$$

$$= y_1^2 = x^2-1 \mid \Delta.$$

Είναι $x^2 - y_1^2 = 1$, δηλ. ισοσκελές υπερβολή κέντρου $O(0,0)$ και άξονα μεγάλου τον άξονα των τεταγμένων



Σχ. 4.

και $y_2 = x^2 - 1$, δηλ. παραβολή.

Έχουμε $y_1' \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} +\infty$, $y_2' = 2x \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} -2 < 0 \leadsto y_2 \downarrow$ (σελ. 7, 6, σχ. β₂, α₃), $y_1' \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} \pm\infty$, $y_2' = 2x \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 2 > 0 \leadsto y_2 \uparrow$ (σελ. 9, 8, σχ. δ₂, β₃), $y_1' = \frac{\pm x}{\sqrt{x^2-1}}$, $y_1'' = \dots = \frac{\mp 1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$, $y_2'' = 2 > 0 \leadsto y_2$ κοίτη (σελ. 11, § 3, II α₂₁, β₁₁).

Επίσης, η y_1 έχει ωρίχτες ασύμπτωτες τις διχοτόμους $y = \pm x$, ενώ η y_2 δεν έχει (βλέπε σελ. 10, § 2, 1).

Σημείωση I: Ανάλογα έχουμε και για την γενικότερη υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y_1^2}{\beta^2} = 1$.

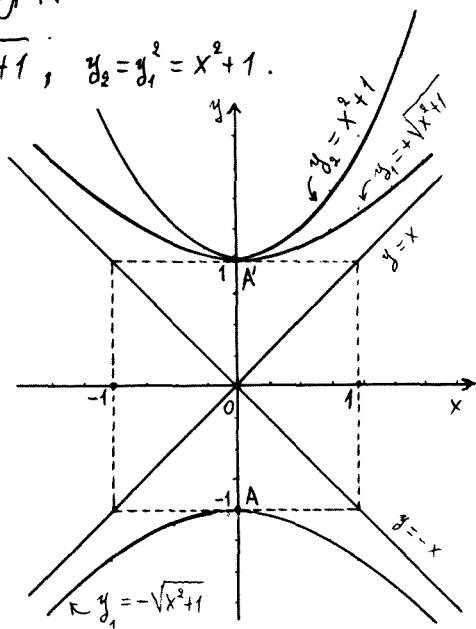
Σημείωση II: Την $y_2 = x^2 - 1$ (x εκτός του $(-1, 1)$), ως την καρέσουμε υπερβολοειδή παραβολή.

5 Επίσης, $y_1 = \pm \sqrt{x^2+1}$, $y_2 = y_1^2 = x^2+1$.

Είναι $y_1^2 - x^2 = 1$, δηλ. ισοσκελές κέντρο $O(0,0)$ και άξονα (συμμετρίας και οι δύο) μεγάλον τον άξονα των τεταγμένων· και $y_2 = x^2+1$, δηλ. παραβολή (σελ. 1, § 2, γ, δ, στ, ζ).

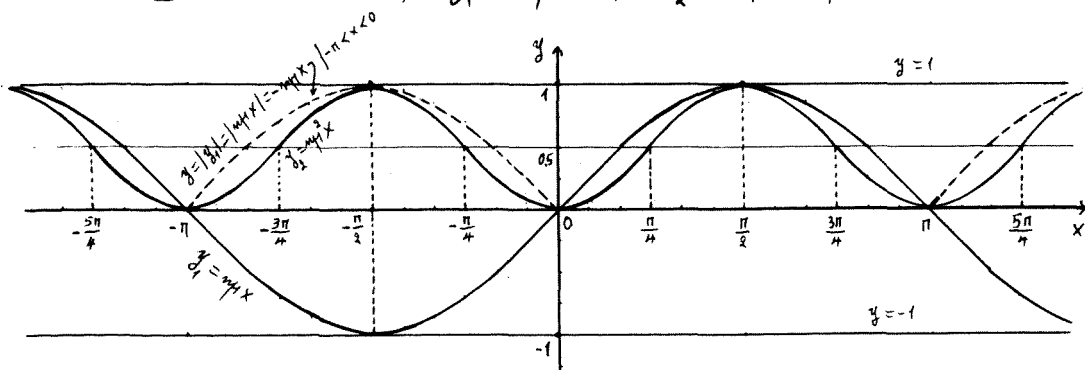
Είναι $y_1' = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $y_1'' = \dots = \pm \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, (βλέπε

σελ. 11, I α₁, β₂, II α₁, β₂).



Σχ. 5

6 ΕΠΙΣΗΣ, $y_1 = \sin x$, $y_2 = y_1^2 = \sin^2 x$.



Σχ. 6.

Ως εργαστούμε γρασινά:

Η γρασινά αράσασα τής $y_1 = \sin x$ είναι η γνωστή ήπικονο-
ειδής. Είναι $y_1 = \sin x$, $y_1' = \cos x$, $y_1'' = -\sin x$ και $y_2 = y_1^2 = \sin^2 x$, $y_2' = 2y_1 y_1' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$, $y_2'' = (y_2')' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$. Η
άλλως $y_2'' = 2(f'^2 + ff'') = 2(y_1'^2 + y_1 y_1'') = 2[\cos^2 x + \sin x(-\sin x)] =$
 $= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x$.

Γιά τή αράσασα τής y_2 : Είναι $y_2' = \sin 2x = 0 \rightarrow 2x = k\pi$
 $\rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$. Άρα για $k=0 \rightarrow x_0=0$, $k=1 \rightarrow x_1=\frac{\pi}{2}$, $k=2 \rightarrow x_2=\pi$, ..., $k=-1 \rightarrow x_{-1}=-\frac{\pi}{2}$, $k=-2 \rightarrow x_{-2}=-\pi$, κ.λ.π. Είναι δέ
 $y_2''(\frac{k\pi}{2}) = 2\cos(2 \cdot \frac{k\pi}{2}) = 2\cos(k\pi) = \pm 2 \neq 0$. Άρα έχουμε αράσασα
και όχι σ.α.

Αν k άρτιας $= 2j \rightarrow y_2''(\frac{k\pi}{2}) = y_2''(\frac{2j\pi}{2}) = y_2''(j\pi) =$
 $= 2 \cdot \cos(2j\pi) = +2 > 0$ και $y_2(j\pi) = \sin^2(j\pi) = 0$.

Άρα, στή σμεία $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, κ.λ.π. έχουμε
min τής y_2 .

Αν k άπειρος $= 2j+1 \rightarrow y_2''(\frac{k\pi}{2}) = y_2''(\frac{(2j+1)\pi}{2}) =$

$$= 2 \sin \left(2 \frac{(2\lambda+1)\pi}{2} \right) = 2 \sin [(2\lambda+1)\pi] = -2 < 0 \cdot \text{και} \ y_2 \left(\frac{(2\lambda+1)\pi}{2} \right) = \\ = \pi^2 \frac{(2\lambda+1)\pi}{2} = \pi^2 \left(\lambda\pi + \frac{\pi}{2} \right) = (\pm 1)^2 = +1.$$

Άρα στα σημεία $(-\frac{\pi}{2}, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$, κ.λ.ω. έχουμε max της y_2 .

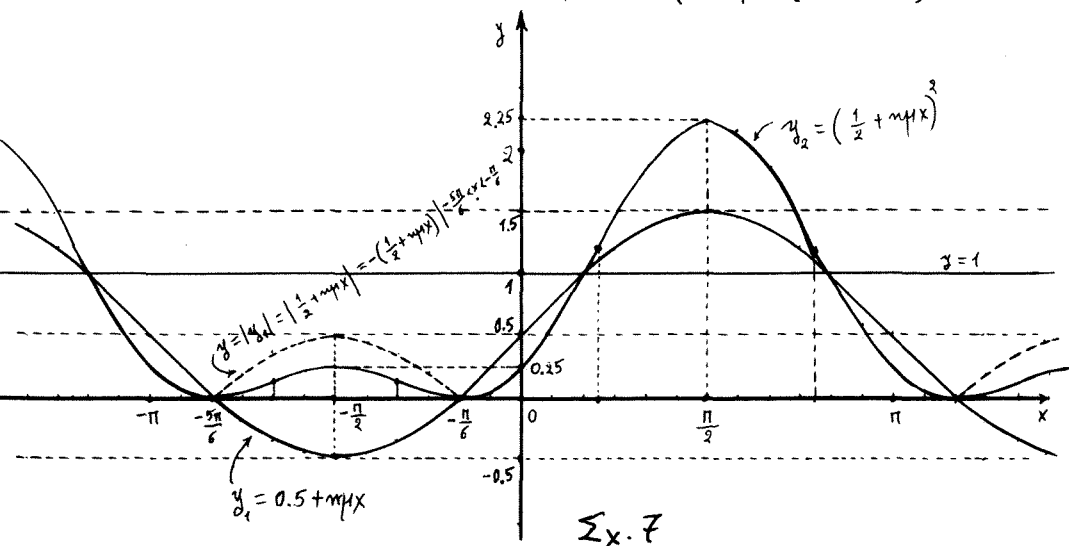
Για τα θ.υ. της y_2 : Είναι $y_2'' = 2 \sin 2x = 0 \leadsto$
 $2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$. Και για $k=0 \leadsto x_{\sigma.u.0} = \frac{\pi}{4}$,
 $k=1 \leadsto x_{\sigma.u.1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, $k=2 \leadsto x_{\sigma.u.2} = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$,
 $\dots$, $k=-1 \leadsto x_{\sigma.u.-1} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$, $k=-2 \leadsto x_{\sigma.u.-2} = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$, κ.λ.ω. και $y_2 \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \pi^2 \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$.

Άρα, στα σημεία $(-\frac{5\pi}{4}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{5\pi}{4}, \frac{1}{2})$, κ.λ.ω. έχουμε σημεία καμπής.

Σε ένα μήκος της y_1 υπάρχουν δύο της y_2 και το διάστημα της y_1 είναι διωγμένο της y_2 .

Βλέπε: § 9, § 2, α, β, γ, δ, ε, στ, § 3, I α₂, β₁, II α₂, β₁, γ₃.

7 Εξώισες, $y_1 = \frac{1}{2} + \pi x$, $y_2 = y_1^2 = \left(\frac{1}{2} + \pi x \right)^2$.



Η ημιτονοειδής $y_1 = \sin x$ είναι τώρα μετασχηματισμένη ως προς τα «κάτω» κατά $\frac{1}{2}$.

Είναι: $y_1' = \cos x$, $y_1'' = -\sin x$, $y_2' = \cos x + 2\sin x \cos x$,
 $y_2'' = 2(\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin x - \sin^2 x)$.

Για τα άρματα y_2 : Είναι $y_2' = \cos x(1 + 2\sin x) = 0 \leadsto 1 + 2\sin x = 0$ και $\cos x = 0$.

Από την πρώτη:

$$\sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \leadsto x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \text{ και } x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}.$$

Από την $x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$: $k=0 \leadsto x_0 = -\frac{\pi}{6}$, $k=1 \leadsto x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$, $k=2 \leadsto x_2 = 4\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{23\pi}{6}$, $k=-1 \leadsto x_{-1} = -2\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{13\pi}{6}$. Δηλ. σε ένα κύκλο της y_1 υπάρχουν ένα τέτοιο σημείο με $y_2(2k\pi - \frac{\pi}{6}) = [\frac{1}{2} + \sin(2k\pi - \frac{\pi}{6})]^2 = (\frac{1}{2} - \sin \frac{\pi}{6})^2 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 = 0$. Τα σημεία αυτά είναι και της y_1 .

Από την $x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}$: $k=0 \leadsto x_0 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, $k=1 \leadsto x_1 = 3\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$, $k=-1 \leadsto x_{-1} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$, $k=-2 \leadsto x_{-2} = -3\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{17\pi}{6}$. Δηλ. σε ένα κύκλο της y_1 υπάρχουν ένα τέτοιο σημείο με $y_2[(2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}] = [\frac{1}{2} + \sin[(2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}]]^2 = [\frac{1}{2} + \sin(\pi + \frac{\pi}{6})]^2 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^2 = 0$. Τα σημεία αυτά είναι και της y_1 .

Από τα δεύτερα τώρα:

$$\cos x = 0 \leadsto x = k\pi + \frac{\pi}{2} : k=0 \leadsto x_0 = \frac{\pi}{2}, k=1 \leadsto x_1 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}, k=2 \leadsto x_2 = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}, \dots, k=-1 \leadsto x_{-1} = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}, \text{ κ.λ.ω.} \cdot \text{ Άλλα με } k = \text{άρτιο} = 2j \leadsto y_2(2j\pi + \frac{\pi}{2}) =$$

$= \left[\frac{1}{2} + \eta_1 \left(2j\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right]^2 = \left(\frac{1}{2} + 1 \right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$ και με $k = \text{θε-}$
 $\rhoιζό} = 2j+1 \rightsquigarrow y_2 \left[(2j+1)\pi + \frac{\pi}{2} \right] = \left[\frac{1}{2} + \eta_1 \left[(2j+1)\pi + \frac{\pi}{2} \right] \right]^2 =$
 $= \left[\frac{1}{2} + \eta_1 \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right]^2 = \left(\frac{1}{2} - 1 \right)^2 = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 = 0.25$. Δηλ. σε ένα υψ-
 μα της y_1 υπάρχουν δύο τέτοια σημεία με τεταγμένες
 2.25 το ένα και 0.25 το άλλο.

Για να είναι άμερονα τα σημεία αυτά πρέπει η
 y_2'' σε αυτά τα σημεία να είναι $\neq 0$.

Είναι:

Με $x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow y_2'' \left(2k\pi - \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left[\sigma \omega^2 \left(2k\pi - \frac{\pi}{6} \right) - \right.$
 $\left. - \frac{1}{2} \eta_1 \left(2k\pi - \frac{\pi}{6} \right) - \eta_1^2 \left(2k\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right] = 2 \left[\sigma \omega^2 \left(-\frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} \eta_1 \left(-\frac{\pi}{6} \right) - \eta_1^2 \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] =$
 $= 2 \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right] = 2 \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{4}{9} > 0$. Άρα στα
 σημεία $\left(-\frac{13\pi}{6}, 0 \right), \left(-\frac{\pi}{6}, 0 \right), \left(\frac{11\pi}{6}, 0 \right), \left(\frac{23\pi}{6}, 0 \right)$, κ.λ.θ.,
 έχουμε $\min$ της y_2 .

Με $x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow y_2'' \left[(2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \right] = 2 \left[\sigma \omega^2 \left[(2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \right] - \right.$
 $\left. - \frac{1}{2} \eta_1 \left[(2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \right] - \eta_1^2 \left[(2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \right] \right] = 2 \left[\sigma \omega^2 \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{2} \eta_1 \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) - \right.$
 $\left. - \eta_1^2 \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) \right] = 2 \left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] = 2 \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{4}{9} > 0$.
 Άρα στα σημεία $\left(-\frac{17\pi}{6}, 0 \right), \left(-\frac{5\pi}{6}, 0 \right), \left(\frac{7\pi}{6}, 0 \right), \left(\frac{19\pi}{6}, 0 \right)$,
 κ.λ.θ., έχουμε $\min$ της y_2 .

Με $x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow y_2'' \left(k\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 2 \left[\sigma \omega^2 \left(k\pi + \frac{\pi}{2} \right) - \right.$
 $\left. - \frac{1}{2} \eta_1 \left(k\pi + \frac{\pi}{2} \right) - \eta_1^2 \left(k\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right] = 2 \left[0^2 - \frac{1}{2} (\pm 1) - (\pm 1)^2 \right] =$
 $= 2 \left(\mp \frac{1}{2} - 1 \right) = -3 \text{ ή } -1$, δηλ. < 0 . Άρα στα σημεία

$(-\frac{\pi}{2}, 0.25), (\frac{\pi}{2}, 2.25), (\frac{3\pi}{2}, 0.25), (\frac{5\pi}{2}, 2.25)$, κ.λ.ω.,
 έχουμε max της y_2 .

Για τα σ.κ. της y_2 :

$$\begin{aligned} \text{Είναι } y_2'' &= 2(\sigma\omega^2x - \frac{1}{2}\mu\eta x - \mu\eta^2x) = 0 \rightarrow \sigma\omega^2x - \\ & - \frac{1}{2}\mu\eta x - \mu\eta^2x = (1 - \mu\eta^2x) - \frac{1}{2}\mu\eta x - \mu\eta^2x = -2\mu\eta^2x - \frac{1}{2}\mu\eta x + 1 = 0 \\ & \rightarrow 4\mu\eta^2x + \mu\eta x - 2 = 0 \text{ και } \mu\eta x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8} \\ & \rightarrow x_1 \simeq 0.6 \text{ ακέρια ή σε μοίρες περίπου } 36^\circ \text{ και } x_2 \simeq -1 \\ & \text{ακέρια ή σε μοίρες περίπου } -57^\circ, 5. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } x = 360^\circ k + 36^\circ \text{ και } x = (2k+1)180^\circ - 36^\circ.$$

Από την πρώτη: $k=0 \rightarrow x_0 = 36^\circ (= 0.6 \text{ σε ακέρια}),$
 $k=1 \rightarrow x_1 = 360^\circ + 36^\circ, k=-1 \rightarrow x_{-1} = -360^\circ + 36^\circ$, κ.λ.ω., με
 $y_2(0.6) \simeq 1.2$ δηλ. σε ένα κύμα της y_1 υπάρχει ένα μόνο
 τέτοιο σ.κ. της y_2 .

Από την δεύτερη: $k=0 \rightarrow x_0 = 180^\circ - 36^\circ (= 3.14 - 0.6 =$
 $= 2.5 \text{ σε ακέρια}), k=1 \rightarrow x_1 = 3 \cdot 180^\circ - 36^\circ, k=-1 \rightarrow x_{-1} =$
 $= -180^\circ - 36^\circ$, κ.λ.ω., με $y_2(0.6) \simeq 1.2$ δηλ. σε ένα κύμα
 της y_1 υπάρχει ένα μόνο τέτοιο σ.κ. της y_2 .

Επίσης είναι:

$$x = 360^\circ k - 57^\circ \text{ και } x = (2k+1)180^\circ + 57^\circ.$$

Από την πρώτη: $k=0 \rightarrow x_0 = -57^\circ (= -1 \text{ σε ακέρια}),$
 $k=1 \rightarrow x_1 = 360^\circ - 57^\circ, k=-1 \rightarrow x_{-1} = -360^\circ - 57^\circ$, κ.λ.ω.,

Με $y_2(-1) \simeq 0.1 \cdot \delta \mu\lambda$. Σε ένα κύμα της y_1 υπάρχει ένα μόνο τέτοιο σ.μ. της y_2 .

Από την δεύτερη: $K=0 \leadsto x_0 = 180^\circ + 57^\circ$, $K=1 \leadsto x_1 = 3 \cdot 180^\circ + 57^\circ$, $K=-1 \leadsto x_{-1} = -180^\circ + 57^\circ (= -3.14 + 1 = -2.14$ σε ακτίνα), κ.λ.θ., με $y_2(-1) \simeq 0.1 \cdot \delta \mu\lambda$. Σε ένα κύμα της y_1 υπάρχει ένα μόνο τέτοιο σ.μ. της y_2 .

Τελικά σε ένα κύμα της y_1 υπάρχουν τέσσερα σ.μ. Για το σχήμα τ έχουμε τα $(-2.14, 0.1)$, $(-1, 0.1)$, $(0.6, 1.2)$ και $(2.5, 1.2)$.

Βλέπε: § 1, § 2 α, β, γ, δ, ε, § 3 I α, β, II α, β.

Σημείωση: Αν η ιπποκυρτωμένη $y = \eta \mu x$ ήταν μετατοπισμένη ως προς τα «κάτω» κατά $\frac{1}{2}$, δηλ. αν ήταν $y_1 = -\frac{1}{2} + \eta \mu x$, τότε, το μέγιστο της $y_2 = (-\frac{1}{2} + \eta \mu x)^2$, το άμεσως «δεξιά» του άξονα των y , θα ήταν το 0.25 και το άμεσως «αριστερά», το 2.25.

8 Εδώς, $y_1 = 1 + \eta \mu x$, $y_2 = (1 + \eta \mu x)^2$.

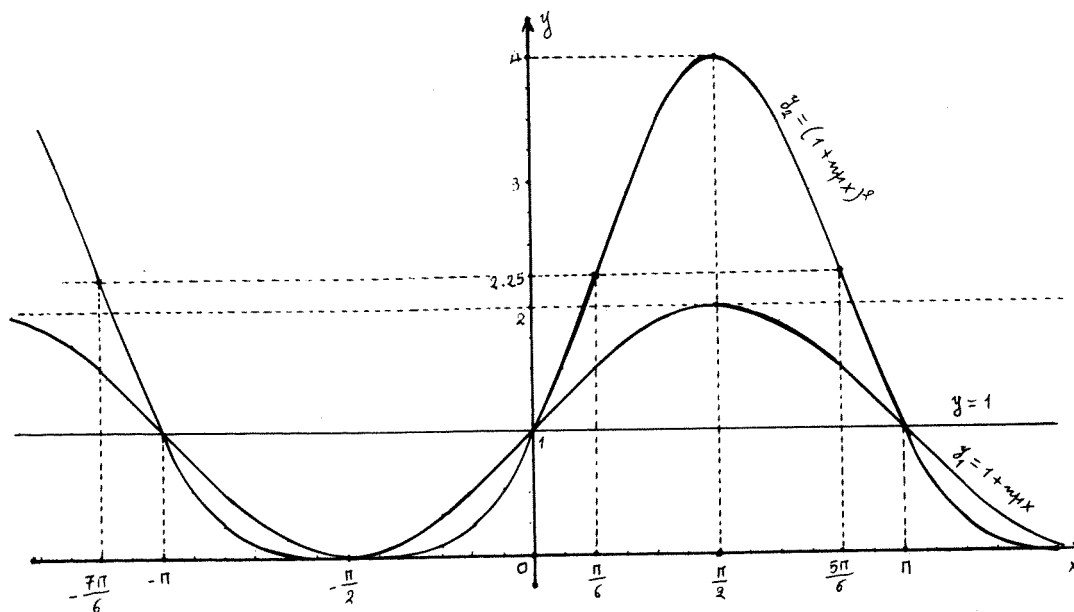
Είναι $y_1' = \eta \sigma \nu x$, $y_1'' = -\eta \mu x$, $y_2' = 2(1 + \eta \mu x) \eta \sigma \nu x$ και $y_2'' = \dots = -2(2\eta \mu^2 x + \eta \mu x - 1)$.

Για τα ακρότατα της y_2 :

Είναι $y_2' = 2(1 + \eta \mu x) \eta \sigma \nu x = 0 \leadsto 1 + \eta \mu x = 0$ και $\eta \sigma \nu x = 0$.

Από την πρώτη:

$$\mu\mu x = -1 = \mu\mu(-\frac{\pi}{2}) \leadsto x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} : k=0 \leadsto x_0 = -\frac{\pi}{2}, k=1 \leadsto x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{2}, k=-1 \leadsto x_{-1} = -2\pi - \frac{\pi}{2}, \text{ u. j. } \varnothing. \text{ Καί } y_2(2k\pi - \frac{\pi}{2}) =$$



Σχ. 8.

$$= [1 + \mu\mu(2k\pi - \frac{\pi}{2})]^2 = [1 + \mu\mu(-\frac{\pi}{2})]^2 = (1-1)^2 = 0.$$

Από την δεύτερη:

$$\sin x = 0 \leadsto x = k\pi + \frac{\pi}{2} : k=0 \leadsto x_0 = \frac{\pi}{2}, k=1 \leadsto x_1 = \pi + \frac{\pi}{2},$$

$$k=-1 \leadsto x_{-1} = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}, \text{ u. j. } \varnothing. \text{ Καί } y_2(k\pi + \frac{\pi}{2}) = [1 + \mu\mu(k\pi + \frac{\pi}{2})]^2 = (1 \pm 1)^2 = 4 \text{ ή } 0.$$

$$\text{Είναι δε και } y_1(2k\pi - \frac{\pi}{2}) = 1 + \mu\mu(2k\pi - \frac{\pi}{2}) = 1-1 = 0 \text{ και}$$

$$y_1(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 + \mu\mu(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \pm 1 = 2 \text{ ή } 0.$$

Προχωρούμε στην y_2'' :

$$\text{Είναι } y_2''(2k\pi - \frac{\pi}{2}) = -2 [2\mu\mu^2(2k\pi - \frac{\pi}{2}) + \mu\mu(2k\pi - \frac{\pi}{2}) - 1] = -2 [\mu\mu^2(-\frac{\pi}{2}) + \mu\mu(-\frac{\pi}{2}) - 1] = 2 > 0 \leadsto y_2 \text{ min.}$$

$$\text{Επίσης, } y_2''(k\pi + \frac{\pi}{2}) = -2 [2\mu\mu^2(k\pi + \frac{\pi}{2}) + \mu\mu(k\pi + \frac{\pi}{2}) - 1] =$$

$$= (\text{αν } \kappa: \text{αριθος}) = -2 \left[2\mu\pi^2 \left(\frac{\pi}{2}\right) + \mu\pi \left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right] = -2(2+1-1) = -4 < 0$$

$\leadsto y_2$ max. και αν κ : περιτερος, τότε το $\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ γίνεται $2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$, το οποίο εξετάσθηκε.

Για τα σ.μ. της y_2 :

$$\text{Είναι } y_2'' = -2(2\mu\pi^2 x + \mu\pi x - 1) = 0 \leadsto 2\mu\pi^2 x + \mu\pi x - 1 = 0$$

$$\leadsto \mu\pi x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{2} \\ \searrow -1 \end{matrix} \leadsto$$

$$\mu\pi x = \frac{1}{2} = \mu\pi \frac{\pi}{6} \leadsto x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \text{ και } x = (2\kappa+1)\pi - \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Με } x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}: \kappa=0 \leadsto x_0 = \frac{\pi}{6}, \kappa=1 \leadsto x_1 = 2\pi + \frac{\pi}{6},$$

$$\kappa=-1 \leadsto x_{-1} = -2\pi + \frac{\pi}{6}, \text{ κ.λ.π.}$$

$$\text{Με } x = (2\kappa+1)\pi - \frac{\pi}{6}: \kappa=0 \leadsto x_0 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \kappa=-1 \leadsto$$

$$x_{-1} = -\pi - \frac{\pi}{6}, \text{ κ.λ.π.}$$

$\mu\pi x = -1 \leadsto x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$. Αλλά στα σημεία αυτά είδαμε ότι έχουμε min.

Βλέπε: § 1, § 2 α, β, γ, δ, § 3 Ια, β, ΙΙα.

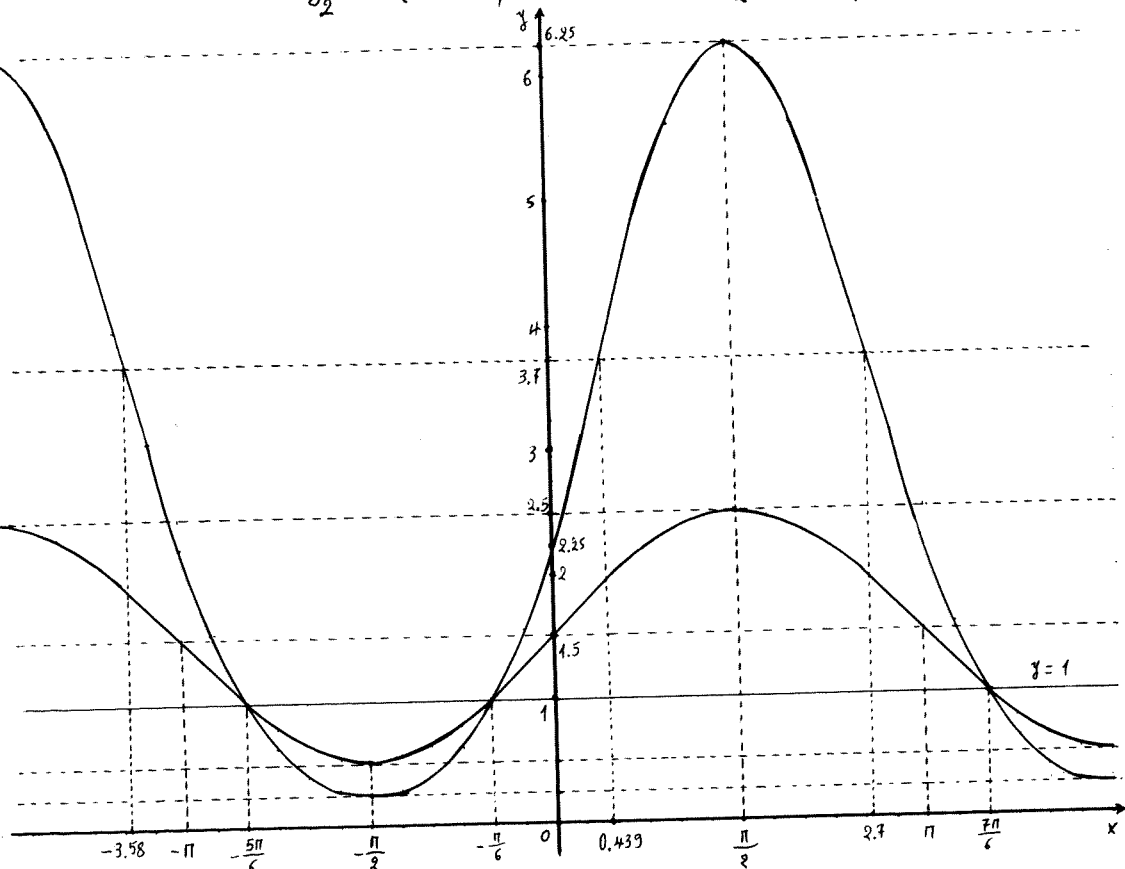
Σημείωση Ι: Σε ένα κύμα παρουσιάζονται δύο σ.μ.

Σημείωση ΙΙ: Αν είναι $y_1 = -1 + \mu\pi x$, $y_2 = (-1 + \mu\pi x)^2$, τότε για την γραφική παράσταση της y_2 θα βοηθήσει ή $y = |y_1| = |-1 + \mu\pi x| = |1 - \mu\pi x| = 1 - \mu\pi x$, επειδή $1 - \mu\pi x \geq 0$.

Είναι αριθμός ή y_2 του παραδείγματος 8 με διαφορά φάσεως ίση με π .

9 Έξωδισμος, $y_1 = 1.5 + \eta\eta x$, $y_2 = (1.5 + \eta\eta x)^2$.

Είναι $y'_2 = 2(1.5 + \eta\eta x) \sigma\upsilon\nu x$ και $y''_2 = -(4\eta\eta^2 x + 3\eta\eta x - 2)$.



Σχ. 9.

Για τα άμφοτερά της y_2 :

Είναι $y'_2 = 2(1.5 + \eta\eta x) \sigma\upsilon\nu x = 0 \rightarrow 1.5 + \eta\eta x = 0$
 $\rightarrow \eta\eta x = -1.5$ (απορρίπτεται) και $\sigma\upsilon\nu x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow$
 $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_1 = \pi + \frac{\pi}{2}$, $x_{-1} = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, κ.λ.ω. Καί $y_2(k\pi + \frac{\pi}{2}) =$
 $= [1.5 + \eta\eta(k\pi + \frac{\pi}{2})]^2 = (1.5 \pm 1)^2 = (2.5)^2 = 6.25$ ή $(0.5)^2 = 0.25$.

Προχωρούμε στην y''_2 :

$$\begin{aligned} \text{Είναι } y_2''(k\pi + \frac{\pi}{2}) &= -[4\mu\mu^2(k\pi + \frac{\pi}{2}) + 3\mu\mu(k\pi + \frac{\pi}{2}) - 2] = \\ &= -[4(\pm 1)^2 + 3(\pm 1) - 2] = -(4 \pm 3 - 2) = -(2 \pm 3) = (\text{αν } k: \text{άρτιος}) = \\ &= -(2+3) < 0 \leadsto y_2 \text{ max και } (\text{αν } k: \text{περιττός}) = -(2-3) = \\ &= -(-1) = +1 > 0 \leadsto y_2 \text{ min.} \end{aligned}$$

Για τα σ.υ. της y_2 :

$$\begin{aligned} \text{Είναι } y_2'' &= -(4\mu\mu^2 x + 3\mu\mu x - 2) = 0 \leadsto 4\mu\mu^2 x + 3\mu\mu x - 2 = 0 \\ \leadsto \mu\mu x &= \frac{-3 \pm \sqrt{9+32}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{8} \simeq \begin{cases} 0.425 \text{ δευτή} \\ -1.17 \text{ αδορρώτετα} \end{cases} \\ \leadsto x &\simeq 0.439 \text{ σε ακρίβεια } \dot{\mu} \text{ } 25^\circ. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } x = 360^\circ k + 25^\circ \text{ και } x = (2k+1)180^\circ - 25^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Από την πρώτη: } k=0 &\leadsto x_0 = 25^\circ, k=1 \leadsto x_1 = 360^\circ + 25^\circ, \\ k=-1 &\leadsto x_{-1} = -360^\circ + 25^\circ, \text{ κ.λ.π., με } y_2(2k\pi + 0.439) = \\ &= [1.5 + \mu\mu(2k\pi + 0.439)]^2 \simeq 3.7 \cdot \delta\mu\eta. \text{ σε ένα κύμα της } y_1 \text{ υ-} \\ &\text{αάρχει ένα μόνο τέτοιο σ.υ. της } y_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Από τη δεύτερη: } k=0 &\leadsto x_0 = 180^\circ - 25^\circ (= 3.14 - 0.439 = \\ &= 2.7), k=1 \leadsto x_1 = 3 \cdot 180^\circ - 25^\circ, k=-1 \leadsto x_{-1} = -180^\circ - 25^\circ (= \\ &= -3.14 - 0.439 = -3.579), \text{ με } y_2[(2k+1)\pi - 0.439] = \\ &= [1.5 + \mu\mu[(2k+1)\pi - 0.439]]^2 = [1.5 + \mu\mu(\pi - 0.439)]^2 = [1.5 + \mu\mu(0.439)]^2 \simeq \\ &\simeq 3.7 \cdot \delta\mu\eta. \text{ σε ένα κύμα της } y_1 \text{ υαάρχει ένα μόνο τέτοιο} \\ &\text{σ.υ. της } y_2. \end{aligned}$$

Τελικά σε ένα κύμα της y_1 υαάρχουν δύο σημεία μα-
ωής της y_2 .

Βλέπε: § 1, § 2 θ, γ, δ, § 3 I α, α₂, II α.

Σημείωση: Αν $y_1 = -1.5 + \mu\eta x$, $y_2 = (-1.5 + \mu\eta x)^2$, συνεπώς έχουμε όπως στη σημείωση II του παραδείγματος 8.

10 ΓΕΝΙΚΟΣ: $y_1 = \alpha + \mu\eta x$, $y_2 = (\alpha + \mu\eta x)^2$.

Είναι $y_1' = \sigma\upsilon\nu x$, $y_1'' = -\mu\eta x$, $y_2' = 2(\alpha + \mu\eta x)\sigma\upsilon\nu x$, $y_2'' = 2(f'^2 + f f'') = 2[\sigma\upsilon\nu^2 x + (\alpha + \mu\eta x)(-\mu\eta x)] = \dots = 2(2\mu\eta^2 x + \alpha\mu\eta x - 1)$.

Για τα άκρότατα της y_2 :

Είναι $y_2' = 2\sigma\upsilon\nu x(\alpha + \mu\eta x) = 0 \leadsto \sigma\upsilon\nu x = 0$ και $\mu\eta x = -\alpha$.

Από την ωρώση: $x = k\pi + \frac{\pi}{2} \leadsto k=0 \leadsto x_0 = \frac{\pi}{2}$, $k=1 \leadsto x_1 = \pi + \frac{\pi}{2}$, $k=-1 \leadsto x_{-1} = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, $k=-2 \leadsto x_{-2} = -2\pi + \frac{\pi}{2} = -\pi - \frac{\pi}{2}$, κ.λ.θ.

Δηλ., πάντοτε στις (θετικές) εὐθείες $x = \pm \frac{\pi}{2}$ (ας οφρι-οριζούμε σ' αυτές) ἔχομε κρίσιμα σημεία.

Επίσης, κρίσιμα σημεία ἔχομε και ἀπὸ τὴν γύση τῆς $\mu\eta x = -\alpha$.

Εἶναι:

$$y_2''(k\pi + \frac{\pi}{2}) = -2[2\mu\eta^2(k\pi + \frac{\pi}{2}) + \alpha\mu\eta(k\pi + \frac{\pi}{2}) - 1] = -2[2(\pm 1)^2 + \alpha(\pm 1) - 1] = -2(1 \pm \alpha).$$

(I). Αν $1 < \alpha$ ($\leadsto 0 < 2 < 1 + \alpha$ και $1 - \alpha < 0$) $\leadsto -2(1 + \alpha) < 0$ και $-2(1 - \alpha) > 0$. Δηλ. πάνω στὴν (θετική) εὐθεία $x = \frac{\pi}{2}$ ἔχομε τὸ $\mu\eta x$ και ἀνω στὴν (θετική) εὐθεία $x = -\frac{\pi}{2}$ ἔχομε τὸ $\min$.

②. Άν $\alpha < -1$ ($\leadsto 1+\alpha < 0$ και $-\alpha > 1$ ή $1-\alpha > 2 > 0$)
 $\leadsto -2(1+\alpha) > 0$ και $-2(1-\alpha) < 0$. Δηλ. στύν $x = \frac{\pi}{2}$ έχουμε
 το min και στύν $x = -\frac{\pi}{2}$, το max.

③. Άν $-1 < \alpha < 1$ ($\leadsto -1 < \alpha$ ή $0 < 1+\alpha$ και $0 < 1-\alpha$)
 $\leadsto -2(1\pm\alpha) < 0$. Δηλ. άνω στύς εύδειες $x = \pm \frac{\pi}{2}$ έχουμε max.

④. Άν $\alpha = +1 \leadsto -2(1\pm 1) = \begin{cases} < 0 \\ = 0 \end{cases}$. Δηλ., στύν εύ-
 δεία $x = \frac{\pi}{2}$ έχουμε το max. Καί στύν $x = -\frac{\pi}{2}$ φροχωρούμε
 για φρόσημο τής $y_2'''(-\frac{\pi}{2})$.

$$\text{Είναι } y_2''' = -2(4\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + \alpha\sigma\upsilon\nu\chi) = -2(2\eta\mu 2\chi + \alpha\sigma\upsilon\nu\chi).$$

$$\text{Άρα } y_2'''(-\frac{\pi}{2}) = -2[2\eta\mu(-\pi) + \alpha\sigma\upsilon\nu(-\frac{\pi}{2})] = 0.$$

$$\text{Συνέχεια: } y_2^{(4)} = -2(4\sigma\upsilon\nu 2\chi - \alpha\eta\mu\chi) \leadsto y_2^{(4)}(-\frac{\pi}{2}) =$$

$$= -2[4\sigma\upsilon\nu(-\pi) - \alpha\eta\mu(-\frac{\pi}{2})] = -2(-4 + \alpha) = -2(-4 + 1) > 0. \text{ Άρα}$$

$$\text{στύν εύδεια } x = -\frac{\pi}{2} \text{ έχουμε το min.}$$

⑤. Άν $\alpha = -1 \leadsto -2[1\pm(-1)] = \begin{cases} < 0 \\ < 0 \end{cases}$. Δηλ., στύν εύ-
 δεία $x = -\frac{\pi}{2}$ έχουμε το max. Καί για τύν $x = \frac{\pi}{2}$ έχουμε:

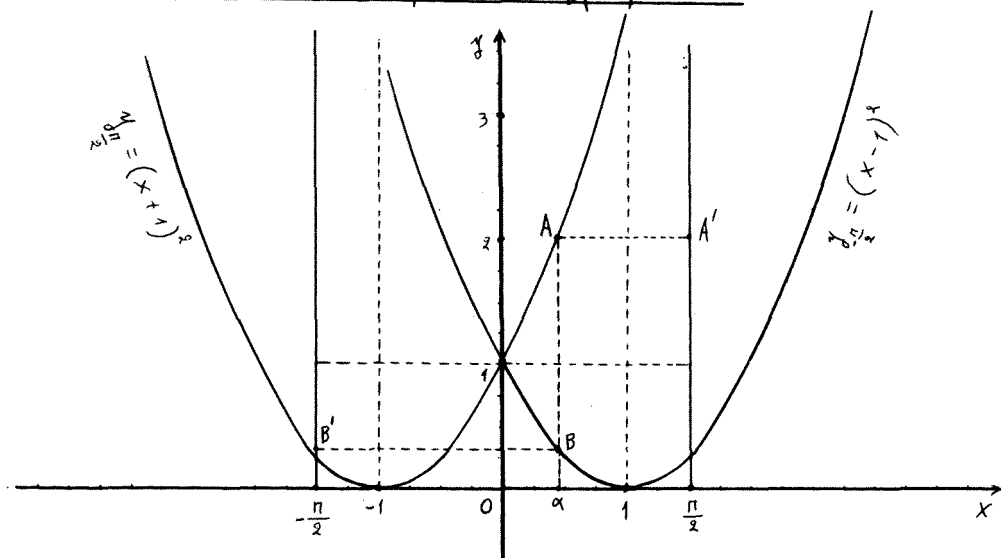
$$y_2''(\frac{\pi}{2}) = -2(2\eta\mu\pi + \alpha\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}) = 0.$$

$$\text{Συνέχεια: } y_2^{(4)}(\frac{\pi}{2}) = -2(4\sigma\upsilon\nu\pi - \alpha\eta\mu\frac{\pi}{2}) = -2(-4 - \alpha) =$$

$$= -2(-4 + 1) > 0. \text{ Άρα στύν εύδεια } x = \frac{\pi}{2} \text{ έχουμε min.}$$

Είναι δε $y_2(\frac{\pi}{2}) > y_2(-\frac{\pi}{2})$ ή $(\alpha + \eta\mu\frac{\pi}{2})^2 > [\alpha + \eta\mu(-\frac{\pi}{2})]^2$ ή
 $(\alpha + 1)^2 > (\alpha - 1)^2$ ή απλά $4\alpha > 0$, αν $\alpha > 0$. Καί $y_2(\frac{\pi}{2}) < y_2(-\frac{\pi}{2})$,
 αν $\alpha < 0$. Καί $y_2(\frac{\pi}{2}) = y_2(-\frac{\pi}{2})$, αν $\alpha = 0$.

Εύρεση των άκροτάτων γραφικά:



Σχ. 10.

Είναι $y_2(\frac{\pi}{2}) = (\alpha+1)^2$ και $y_2(-\frac{\pi}{2}) = (\alpha-1)^2$. Δηλ. εξαρτάται από το α . Αν το α μινεύεται στον άξονα των x , τότε έχουμε τις παραβολές $y_{\frac{\pi}{2}} = (x+1)^2$ και $y_{-\frac{\pi}{2}} = (x-1)^2$.

Η ευθεία $x = \alpha$ τέμνει την παραβολή $y_{\frac{\pi}{2}} = (x+1)^2$ στο σημείο A και την $y_{-\frac{\pi}{2}} = (x-1)^2$, στο B . Η ευ του $A \parallel$ x o x τέμνει την $x = \frac{\pi}{2}$ στο A' , που είναι το ζητούμενο μακ. Έως όσον, η ευ του $B \parallel$ x o x τέμνει την $x = -\frac{\pi}{2}$ στο B' , που είναι το άλλο μακ. Ανάλογα έχουμε αν το $\alpha \leq 0$.

Για τα σ.υ. της y_2 :

Είναι $y_2'' = -2(2\eta\mu^2 x_0 + \alpha\eta\mu x_0 - 1) = 0 \leadsto \alpha = \frac{1-2\eta\mu^2 x_0}{\eta\mu x_0}$,
όπου x_0 η τετμημένη του σ.υ. Και η τεταγμένη αυτού

$$y_0 = (\alpha + \mu\eta x_0)^2 = \left(\frac{1-2\mu\eta^2 x_0}{\mu\eta x_0} + \mu\eta x_0 \right)^2 = \dots = \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x_0}{\mu\eta^2 x_0}$$

Ώστε ο γεωμετρικός τόπος των σ.υ. είναι η:

$$y = \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{\mu\eta^2 x}$$

[11] Γνωρίζεις πως $y_1 = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\mu\eta x}$ (γραφικά) γά

γίνει η γραμμική παράσταση πως $y_2 = y_1^2$.

Μελέτη πως $y_1 = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\mu\eta x}$.

Είναι: $\mu\eta x = 0 \rightsquigarrow x = k\pi$; $k=0 \rightsquigarrow x_0=0$, $k=1 \rightsquigarrow x_1=\pi$,
 $k=-1 \rightsquigarrow x_{-1}=-\pi$, υ.γ.ω.

Δηλ., οι ειδικές $x_0=0$, $x_1=\pi$, $x_{-1}=-\pi$, υ.γ.ω., είναι
 ανύψωτες, διότι $\sigma\upsilon\nu(k\pi) \neq 0$.

Επίσης, $\sigma\upsilon\nu x = 0 \rightsquigarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$: $k=0 \rightsquigarrow x_0 = \frac{\pi}{2}$, $k=1$
 $\rightsquigarrow x_1 = \pi + \frac{\pi}{2}$, $k=-1 \rightsquigarrow x_{-1} = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$, υ.γ.ω. Δηλ., είναι
 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, υ.γ.ω., σημεία της y_1 .

Είναι $y_1' = \dots = -\sigma\upsilon\nu x \frac{1+\mu\eta^2 x}{\mu\eta^2 x} = 0 \rightsquigarrow \sigma\upsilon\nu x = 0$. Άρα
 γά σημεία $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, υ.γ.ω., είναι κρίσιμα.

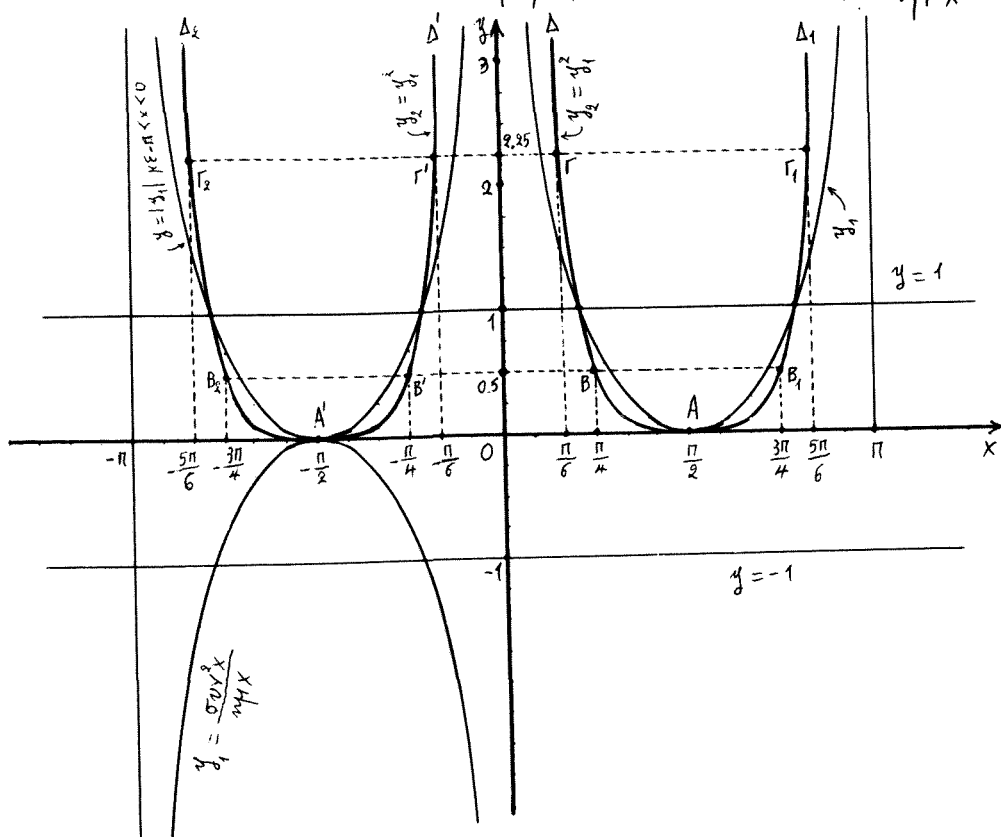
Είναι $y_1'' = -\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x \mu\eta^2 x}{\mu\eta^2 x} \right)' = -\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\mu\eta^2 x} + \sigma\upsilon\nu x \right)' = \dots$
 $= \frac{\mu\eta^4 x - \mu\eta^2 x + 2}{\mu\eta^3 x}$, έπειδή $\mu\eta x \neq 0$. Άλλα $\mu\eta^4 x - \mu\eta^2 x + 2 > 0$,

διότι $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 8 < 0$.

Άρα δεν έχουμε σ.υ. και y_2 κοίτη αν $0 < x < \pi$,

υποψη $\alpha \in -\pi < x < 0$, u. j. w.

Και $\epsilon \mu \tau \acute{\iota} \varsigma \quad |y_1| = \frac{\sigma \upsilon \nu^2 x}{\eta \mu |x|}$, $\epsilon \chi \omicron \mu \epsilon \tau \acute{\iota} \varsigma \quad y_2 = \frac{\sigma \upsilon \nu^4 x}{\eta \mu^2 x}$.



Σχ. 11.

Ι. Αν είναι $\alpha = 0$, τότε έχουμε τὰ σ.μ. $B(\frac{\pi}{4}, 0.5)$, $B_1(\frac{3\pi}{4}, 0.5)$ καὶ $B'(-\frac{\pi}{4}, 0.5)$, $B_2(-\frac{3\pi}{4}, 0.5)$, u. j. w.

ΙΙ. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε τὰ δύο σ.μ. κινούνται στὰ τμήματα $B\Gamma$ καὶ $B_1\Gamma_1$ τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου, ἀπὸ «κάτω» πρὸς τὰ «πάνω», συμμετρικὰ τῆς εὐθείας $x = \frac{\pi}{2}$ καὶ τῆς αὐτῆς τεταγμένης. Καὶ τὰ ἄλλα δύο σ.μ. κινούνται στὰ τμήματα $B'A'$ καὶ B_2A' τοῦ γ.τ., ἀπὸ «πάνω» πρὸς τὰ «κάτω».

συμμετρικά τῆς εὐθείας $x = -\frac{\pi}{2}$ καί τῆς αὐτῆς τετραγμένης, $\mu. \rho. \omega.$

Ⓒ. Ἄν $\alpha = 1$, τότε ἔχομε τὰ σ.κ. $\Gamma(\frac{\pi}{6}, 2.25)$ καί $\Gamma_1(\frac{5\pi}{6}, 2.25)$. ἐνῶ τὰ ἄλλα δύο ἐμφυγίζονται σέ $\mu\mu$ στο $A'(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $\mu. \rho. \omega.$

Ⓓ. Ἄν $1 < \alpha$, τότε τὰ δύο σημεία κατωῆς κινούνται στούς κλάδους τοῦ γ.τ. $\Gamma\Delta$ καί $\Gamma_1\Delta_1$, συμμετρικά τῆς εὐθείας $x = \frac{\pi}{2}$ καί τῆς αὐτῆς τετραγμένης, τοῦ Δ ὁριζιάζοντος τόν ἄξονα y καί τοῦ Δ_1 τῆς εὐθείας $x = \pi$. ἐνῶ τὰ δύο ἄλλα σ.κ. ἔχουν ἐξαφανισθεῖ, $\mu. \rho. \omega.$

Ⓔ. Ἄν $-1 < \alpha < 0$, τότε τὰ δύο σ.κ. κινούνται στά τμήματα $B'\Gamma'$ καί $B_2\Gamma_2$ τοῦ γ.τ. ἀπό «πάνω» πρὸς τὰ «πάνω», συμμετρικά τῆς εὐθείας $x = -\frac{\pi}{2}$ καί τῆς αὐτῆς τετραγμένης. Καί τὰ ἄλλα δύο σ.κ. κινούνται στά τμήματα BA καί B_1A τοῦ γ.τ. ἀπό «πάνω» πρὸς τὰ «κάτω», συμμετρικά τῆς εὐθείας $x = \frac{\pi}{2}$ καί τῆς αὐτῆς τετραγμένης, $\mu. \rho. \omega.$

Ⓕ. Ἄν $\alpha = -1$, τότε ἔχομε τὰ σ.κ. $\Gamma'(-\frac{\pi}{6}, 2.25)$ καί $\Gamma_2(-\frac{5\pi}{6}, 2.25)$. ἐνῶ τὰ ἄλλα δύο ἐμφυγίζονται σέ $\mu\mu$ στο $A(\frac{\pi}{2}, 0)$, $\mu. \rho. \omega.$

Ⓖ. Ἄν $\alpha < -1$, τότε τὰ δύο σ.κ. κινούνται στούς κλάδους τοῦ γ.τ. $\Gamma'\Delta'$ καί $\Gamma_2\Delta_2$, συμμετρικά τῆς εὐθείας $x = -\frac{\pi}{2}$ καί τῆς αὐτῆς τετραγμένης, τοῦ Δ' ὁριζιάζοντος

τον άξονα y και του Δ_2 την ευθεία $x = -\pi$. Ένώ τα άγ-
λα δύο σ.μ. έχουν εξαφανισθεί, μ.γ.ω.

12 ΕΠΙΣΗΣ - άλλη γέννηση - $y_1 = \varepsilon\varphi x$, $y_2 = \varepsilon\varphi^2 x$.

Άς εργαζοῦμε κλασ-
σιμὰ [ωριοιζόμενοι στο δι-
άστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$]:

Εἶναι $y_1' = \frac{1}{\sin^2 x} > 0$

$\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow y_1 \uparrow$ και
ἀνρότατα.

Εἰσως, οἱ εὐθείες $x =$
 $= \pm \frac{\pi}{2}$ εἶναι ἀσύμφορες.

Εἰσως, $y_1 < 0 \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$,
 $y_1 = 0$ για $x = 0$ και $y_1 > 0$

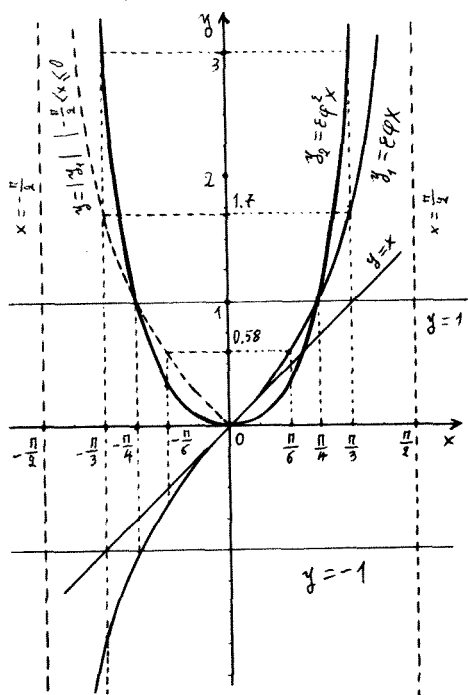
$\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Εἶναι: $y_1'' = \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)' = \dots = \frac{2\eta\mu x}{\sin^3 x} > 0 \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow$
 $\rightarrow$ κοίτη, και $< 0 \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \rightarrow$ κυρτή, και $= 0$ για
 $x = 0 \rightarrow$ σημείο καμπῆς στο $O(0,0)$.

Εἶναι $y_1'(0) = \frac{1}{\sin^2 0} = 1 = \varepsilon\varphi 45^\circ$.

Τελικὰ ἐν τῆς y_1 φρονιῶται ἡ y_2 .

(βλῆθε δ_1, δ_2 α, β, γ, δ, ε, στ, ζ, η, $\delta_3 \parallel \alpha_1, \beta_2,$
 $\gamma_3, \parallel \alpha_1, \delta_4$).



Σχ. 12

Επίσης, εύκολο: $y_1(\frac{\pi}{6}) \simeq 0.58$, $y_2(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}$, $y_1(\frac{\pi}{4}) =$
 $= y_2(\frac{\pi}{4}) = 1$, $y_1(\frac{\pi}{3}) \simeq 1.05$, $y_2(\frac{\pi}{3}) = 3$.

13 Επίσης, $y_1 = 1 + \varepsilon \varphi x$, $y_2 = (1 + \varepsilon \varphi x)^2$.

Εύκολο $y_1' = \frac{1}{\sin^2 x}$,

$$y_1'' = \dots = \frac{2\eta\mu x}{\sin^3 x}, \quad y_2' = 2(1 + \varepsilon \varphi x) \frac{1}{\sin^2 x} =$$

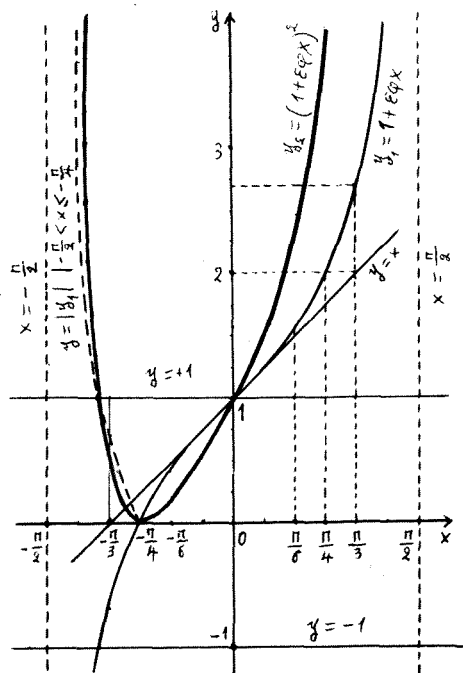
$$= 2 \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\eta\mu x}{\sin^3 x} \right), \quad y_2'' = (y_1')' =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\eta\mu x}{\sin^3 x} \right)' =$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{\sin^4 x} 2\delta\sigma\eta x (-\eta\mu x) + \frac{\sin^2 x + 3\sin^2 x \eta\mu^2 x}{\sin^6 x} \right] =$$

$$= 2 \left(\frac{2\eta\mu x \delta\sigma\eta x + \sin^2 x + 3\eta\mu^2 x}{\sin^4 x} \right) =$$

$$= \frac{2}{\sin^4 x} (2\eta\mu^2 x + \sin^2 x + 1).$$



Σχ. 13.

Η y_1 έστω είναι η

απομακρυνόμενη εφχ (απαράδειγμα 1ε) μετακινούμενη
 προς τα «αριστερά» κατά 1.

Απόσταση της y_2 :

Εύκολο: $y_2' = 2(1 + \varepsilon \varphi x) \frac{1}{\sin^2 x} = 0 \leadsto \varepsilon \varphi x = -1 =$
 $= \varepsilon \varphi(-\frac{\pi}{4}) \leadsto x = -\frac{\pi}{4}$. Και $y_2(-\frac{\pi}{4}) = [1 + \varepsilon \varphi(-\frac{\pi}{4})]^2 = 0$.

Άρα το σημείο $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ είναι κρίσιμο.

Είναί: $y_2'' = \frac{2}{\sin^4 x} (2\mu^2 x + 2\mu x \cos x + 1)$, και
 έμ τής Τριγωνομετρίας έχομε $\mu^2 x = \frac{\varepsilon \varphi^2 x}{1 + \varepsilon \varphi^2 x}$, $\sin^2 x =$
 $= \frac{1}{1 + \varepsilon \varphi^2 x}$. Άρα $y_2'' = \frac{2}{\sin^4 x} \left[2 \frac{\varepsilon \varphi^2 x}{1 + \varepsilon \varphi^2 x} + 2 \frac{\varepsilon \varphi x}{\sqrt{1 + \varepsilon \varphi^2 x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon \varphi^2 x}} + 1 \right] =$
 $= \dots = \frac{2}{\sin^4 x} \cdot \frac{3\varepsilon \varphi^2 x + 2\varepsilon \varphi x + 1}{1 + \varepsilon \varphi^2 x}$. Είναί δε $3\varepsilon \varphi^2 x + 2\varepsilon \varphi x + 1 > 0$
 $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, διότι $\Delta = \theta^2 - \alpha\gamma = 1^2 - 3 < 0$. Άρα y_2 αύ-
 γη· και στο σημείο $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ έχομε min.

(βλέπε $\delta_1, \delta_2, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta \equiv \alpha_1,$
 $\alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \gamma_2, \text{III } \alpha_1, \delta_4$).

ΑΣΚΗΣΗ: Είναί $y_2(\frac{\pi}{3}) = y_2(-\frac{5\pi}{12})$ και $y_2(-\frac{\pi}{12}) = y_2(-\frac{\pi}{3})$.

Απόδειξη: $y_2(\frac{\pi}{3}) = (1 + \varepsilon \varphi \frac{\pi}{3})^2 = (1 + \sqrt{3})^2$. Έπίσης,
 $y_2(-\frac{5\pi}{12}) = [1 + \varepsilon \varphi(-\frac{5\pi}{12})]^2 = (1 - \varepsilon \varphi \frac{5\pi}{12})^2$. Άλλό $\varepsilon \varphi \frac{5\pi}{12} =$
 $= \varepsilon \varphi(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}) = \varepsilon \varphi(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})$. Καί έμ τής Τριγωνομε-
 τρίας έχομε: $\varepsilon \varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon \varphi \alpha + \varepsilon \varphi \beta}{1 - \varepsilon \varphi \alpha \cdot \varepsilon \varphi \beta}$. Άρα $\varepsilon \varphi(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) =$
 $= \frac{\varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} + \varepsilon \varphi \frac{\pi}{6}}{1 - \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} \cdot \varepsilon \varphi \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \dots = 2 + \sqrt{3}$. Έννε
 $(1 - \varepsilon \varphi \frac{5\pi}{12})^2 = [1 - (2 + \sqrt{3})]^2 = (1 + \sqrt{3})^2$.
 Η άλλη: $y_2(-\frac{\pi}{12}) = [1 + \varepsilon \varphi(-\frac{\pi}{12})]^2 = (1 - \varepsilon \varphi \frac{\pi}{12})^2$.

Έν τῆς Τριγωνομετρίας ἔχομε: $\varepsilon\varphi^2 \alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$
 $= \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha)^2}{1 - \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha} = \frac{(1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha)^2}{\eta\mu^2 2\alpha}$, δηλ. $\varepsilon\varphi \alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha}$. Ἀρα

$$\varepsilon\varphi \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(2 \cdot \frac{\pi}{12})}{\eta\mu(2 \cdot \frac{\pi}{12})} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6}}{\eta\mu \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Καί $(1 - \varepsilon\varphi \frac{\pi}{12})^2 = [1 - (2 - \sqrt{3})]^2 = (-1 + \sqrt{3})^2 = (1 - \sqrt{3})^2$.

Ἐνῶ $y_2(-\frac{\pi}{3}) = [1 + \varepsilon\varphi(-\frac{\pi}{3})]^2 = (1 - \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3})^2 = (1 - \sqrt{3})^2$.

14 Ἐπίσης, $y_1 = \sqrt{3} + \varepsilon\varphi x$, $y_2 = (\sqrt{3} + \varepsilon\varphi x)^2$.

Εἶναι: $y'_2 = 2(\sqrt{3} + \varepsilon\varphi x) \frac{1}{\sigma\omega^2 x}$,

$y''_2 = \dots = \frac{2}{\sigma\omega^2 x} (2\eta\mu^2 x + 2\sqrt{3}\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 1)$.

Εἶναι ὡρὸς (ὡς καὶ σὺν

13) μεταβολήμεν κατὰ $\sqrt{3}$.

Ἀπόστακα τῆς y_2 :

Εἶναι: $y'_2 = 2(\sqrt{3} + \varepsilon\varphi x) \frac{1}{\sigma\omega^2 x} =$

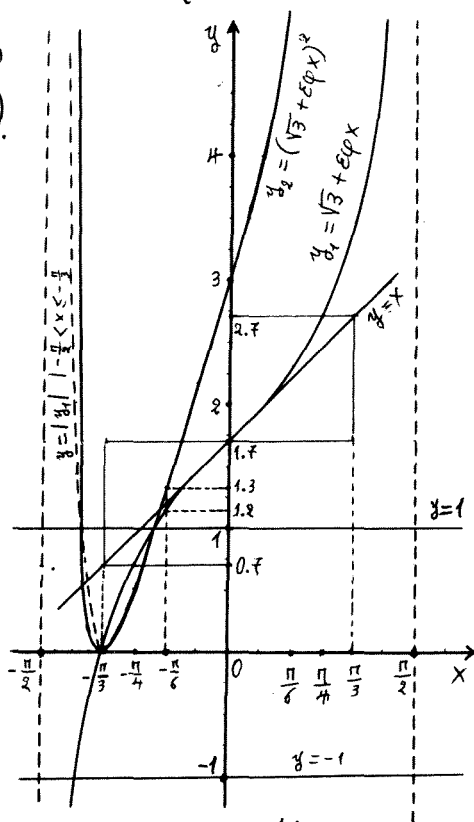
$= 0 \leadsto \varepsilon\varphi x = -\sqrt{3} = \varepsilon\varphi(-\frac{\pi}{3}) \leadsto$

$x = -\frac{\pi}{3}$. Καί $y_2(-\frac{\pi}{3}) =$

$[\sqrt{3} + \varepsilon\varphi(-\frac{\pi}{3})]^2 = 0$. Ἀρα τὸ

σημεῖο $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ εἶναι πρὶ

σέμο.



Σχ. 14.

Είναι : $y_2'' = (\text{όπως και στην προηγούμενη}) = \dots$
 $= \frac{2}{\sin^4 x} \frac{3\epsilon\phi^2 x + 2\sqrt{3}\epsilon\phi x + 1}{1 + \epsilon\phi^2 x}$, αλλά $\Delta = 0$. Άρα $3\epsilon\phi^2 x + 2\sqrt{3}\epsilon\phi x + 1 > 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ εφόσον ΜΙΑΣ ρίζας του x (δουλεύει και μένουμε ή $3\epsilon\phi^2 x + 2\sqrt{3}\epsilon\phi x + 1$ και δουλεύει να βρούμε ρίζα τετράγωνο) της έχουμε $\epsilon\phi x_0 = -\frac{\theta'}{\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x_0 = -\frac{\pi}{6}$ και είναι $y_2''(-\frac{\pi}{6}) = 0$. Είναι δε $y_2(-\frac{\pi}{6}) = [\sqrt{3} + \epsilon\phi(-\frac{\pi}{6})]^2 = (\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3})^2 = (\frac{2\sqrt{3}}{3})^2 = \frac{4}{3} = 1.33$.

Δηλ. η y_2 είναι κοίμη $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Και στο $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ έχουμε min.

Βλέπε : § 1, § 2, α, β, γ, δ, ε, στ, ζ, η, § 3 II α₁, α₂₁, (α₂₃), α₃, β₂, δ₂, III α₄, δ₄).

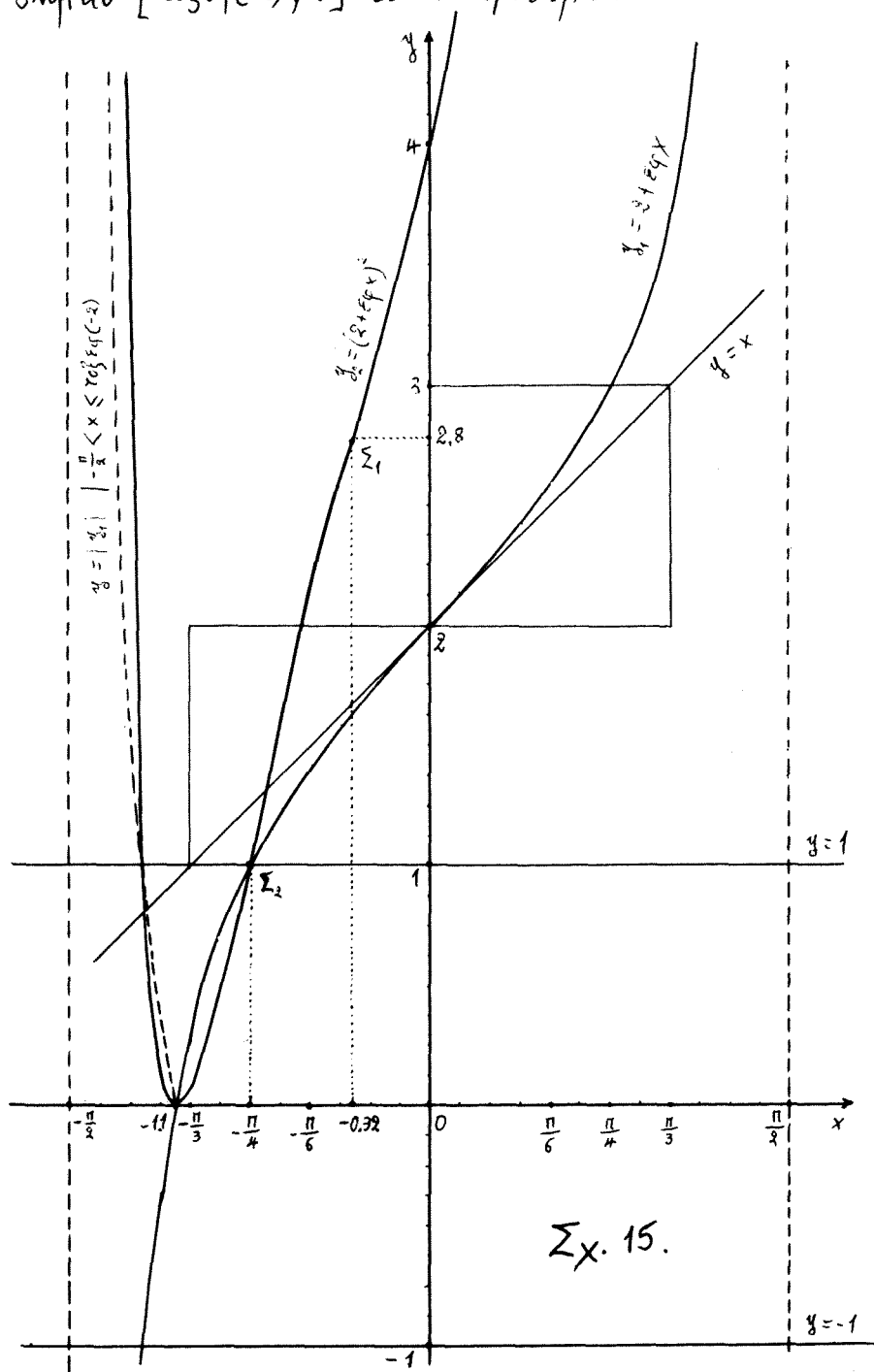
15 Έσθις, (αλλάζει τώρα το βινημό), $y_1 = 2 + \epsilon\phi x$, $y_2 = (2 + \epsilon\phi x)^2$.

Είναι : $y_2' = 2(2 + \epsilon\phi x) \frac{1}{\sin^2 x}$, $y_2'' = \dots = \frac{2}{\sin^4 x} (2\eta\mu^2 x + 4\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 1)$.

Αυόζουα της y_2 :

Είναι : $y_2' = 2(2 + \epsilon\phi x) \frac{1}{\sin^2 x} = 0 \rightarrow \epsilon\phi x = -2 \rightarrow x \simeq -63^\circ$ ή -1.2 ακίνια.

Καί $y_2[\cos \varphi(-2)] = [2 + \varphi[\cos \varphi(-2)]]^2 = [2 - 2]^2 = 0$. Άρα το σημείο $[\cos \varphi(-2), 0]$ είναι κρίσιμο.



$$\text{Είναι: } y_2'' = \dots = \frac{2}{\sin^4 x} \frac{3\epsilon\phi^2 x + 4\epsilon\phi x + 1}{1 + \epsilon\phi^2 x}, \quad \alpha\beta\gamma\delta$$

$$\Delta = 1 > 0 \rightarrow \epsilon\phi x_0 = \frac{-2 \pm 1}{3} = \begin{matrix} \nearrow -\frac{1}{3} \\ \searrow -1 \end{matrix}. \Delta\eta\lambda. \epsilon\phi x = -\frac{1}{3} \rightarrow$$

$$x_{01} \simeq 18,5^\circ \text{ ή σε ακύβια } \simeq -0.32 \text{ και } \epsilon\phi x = -1 =$$

$$= \epsilon\phi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow x_{02} = -\frac{\pi}{4}.$$

$\Delta\eta\lambda.$ η $3\epsilon\phi^2 x + 4\epsilon\phi x + 1$ είναι θετική εντός των ριζών της και αρνητική εντός αυτών.

Ώστε η y_2 είναι κοίμη στα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ και $(-0.32, \frac{\pi}{2})$ και ωρεή στο διάστημα $(-\frac{\pi}{4}, -0.32)$. $\Delta\eta\lambda.$ τα σημεία $\Sigma_1(-0.32, \frac{25}{9} \simeq 2.8)$ και $\Sigma_2(-\frac{\pi}{4}, 1)$ είναι σ.κ. της y_2 .

(Βλέπε: $\delta_1, \delta_2, \alpha, \theta, \gamma, \delta, \epsilon, \sigma\tau, \delta, \eta, \delta \exists \text{ II}$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_3, \theta_2, \delta_2, \text{III } \alpha_1, \delta_1$).

ΑΣΚΗΣΗ:

$$\text{Είναι } y_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = y_2\left(-\frac{\pi}{12}\right) = y_2\left(-\frac{5\pi}{12}\right).$$

$$\text{Απόδειξη: } y_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 + \epsilon\phi\frac{\pi}{4} = 2 + 1 = 3.$$

$$\begin{aligned} y_2\left(-\frac{\pi}{12}\right) &= \left[2 + \epsilon\phi\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]^2 = \left(2 - \epsilon\phi\frac{\pi}{2}\right)^2 = \left[2 - (2 - \sqrt{3})\right]^2 = \\ &= 3, \text{ (βλέπε παραδείγματα 13, άσκηση). Και } y_2\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \\ &= \left[2 + \epsilon\phi\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]^2 = \left(2 - \epsilon\phi\frac{5\pi}{12}\right)^2 = \left[2 - (2 + \sqrt{3})\right]^2 = 3. \end{aligned}$$

16 ΓΕΝΙΚΩΣ: $y_1 = \alpha + \varepsilon \varphi x$, $y_2 = (\alpha + \varepsilon \varphi x)^2$.

Είναι: $y_1' = \frac{1}{\sigma \nu^2 x}$, $y_1'' = \dots = \frac{2 \eta \mu x}{\sigma \nu^3 x}$, $y_2' = 2(\alpha + \varepsilon \varphi x) \frac{1}{\sigma \nu^2 x} =$

$$= 2 \left(\frac{\alpha}{\sigma \nu^2 x} + \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu^3 x} \right), \quad y_2'' = (y_1')' = 2 \left(\frac{\alpha}{\sigma \nu^2 x} + \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu^3 x} \right)' =$$

$$= 2 \left[-\frac{\alpha}{\sigma \nu^4 x} 2 \sigma \nu x (-\eta \mu x) + \frac{\sigma \nu^4 x + 3 \sigma \nu^2 x \eta \mu^2 x}{\sigma \nu^6 x} \right] =$$

$$= 2 \cdot \frac{2 \alpha \eta \mu x \sigma \nu x + \sigma \nu^2 x + 3 \eta \mu^2 x}{\sigma \nu^4 x} = \frac{2}{\sigma \nu^4 x} (2 \eta \mu^2 x + 2 \alpha \eta \mu x \sigma \nu x + 1).$$

Απόστατα της y_2 :

Είναι: $y_2' = 0 \leadsto \varepsilon \varphi x_0 = -\alpha \leadsto x_0 = \tau \sigma \zeta \varepsilon \varphi(-\alpha).$

Καί $y_2(x_0) = (\alpha + \varepsilon \varphi x_0)^2 = (\alpha - \alpha)^2 = 0$. Άρα το ση-
μείο $(x_0, 0)$ είναι κρίσιμο.

Είναι δε $-\frac{\pi}{2} < x_0 < 0$ αν $\alpha > 0$ και $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$

αν $\alpha < 0$ [για να εξοριστούμε στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$].

Είναι: $y_2'' = \frac{2}{\sigma \nu^4 x} (2 \eta \mu^2 x + 2 \alpha \eta \mu x \sigma \nu x + 1)$. Άρα

$$\eta \mu^2 x = \frac{\varepsilon \varphi^2 x}{1 + \varepsilon \varphi^2 x}, \quad \sigma \nu^2 x = \frac{1}{1 + \varepsilon \varphi^2 x}. \quad \text{Άρα } y_2'' =$$

$$= \frac{2}{\sigma \nu^4 x} \left[2 \frac{\varepsilon \varphi^2 x}{1 + \varepsilon \varphi^2 x} + 2 \alpha \frac{\varepsilon \varphi x}{\sqrt{1 + \varepsilon \varphi^2 x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon \varphi^2 x}} + 1 \right] =$$

$$= \dots = \frac{2}{\sigma \nu^4 x} \cdot \frac{3 \varepsilon \varphi^2 x + 2 \alpha \varepsilon \varphi x + 1}{1 + \varepsilon \varphi^2 x} =$$

$$= \frac{2}{\sigma \nu^4 x (1 + \varepsilon \varphi^2 x)} (3 \varepsilon \varphi^2 x + 2 \alpha \varepsilon \varphi x + 1).$$

Απομένει γινών γὰ ἐξετάσουμε τὸ ὅροση-
μο τῆς παραστάσεως $K(x) = 3\epsilon\varphi^2 x + 2\alpha\epsilon\varphi x + 1$.

$$\text{Εἶναι } \Delta' = \alpha^2 - 3.$$

①. Ἀν $\Delta' = \alpha^2 - 3 < 0$, δηλ. $-\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$ τότε
 $K > 0 \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Δηλ. ἡ y_2 εἶναι κοίμη στὸ διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

②. Ἀν $\alpha^2 - 3 = 0$, δηλ. $\alpha = \pm\sqrt{3}$, εἶναι ὡς γιὰ $K > 0$
 $\forall x \in \left[\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - (x_{\sigma.u.}) \right]$, ὅπου $\epsilon\varphi x_{\sigma.u.} = \frac{-\alpha}{3} =$
 $= \frac{-(\pm\sqrt{3})}{3} = \mp \frac{\sqrt{3}}{3} = \epsilon\varphi\left(\mp \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow x_{\sigma.u.} = \mp \frac{\pi}{6}$. Ἀν

δηλ. $\alpha = +\sqrt{3} \rightarrow x_{\sigma.u.} = -\frac{\pi}{6}$ καὶ ἂν $\alpha = -\sqrt{3} \rightarrow$

$x_{\sigma.u.} = +\frac{\pi}{6}$. Ἀλλὰ $K(x_{\sigma.u.}^+)$ καὶ $K(x_{\sigma.u.}^-)$ θετικά.

Ἀρα ἡ y_2 εἶναι κοίμη στὸ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

③. $\alpha^2 - 3 > 0$, δηλ. $\alpha < -\sqrt{3} \vee \sqrt{3} < \alpha$, τότε
 ἔχομε $K > 0$ ἐπὶ τῶν ριζῶν καὶ $K < 0$ ἐν-
 τὸς αὐτῶν.

Ἀν $\alpha > 0$: τότε εἶναι $-\frac{\pi}{2} < x_0 < x_{2\sigma.u.} < x_{1\sigma.u.} < 0$,
 δηλ. $\cos\epsilon\varphi(-\alpha) < \cos\epsilon\varphi \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 3}}{3} < \cos\epsilon\varphi \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 3}}{3} < \cos\epsilon\varphi 0$,

$$\delta\eta\lambda. -\alpha < \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 3}}{3} < \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 3}}{3} < 0, \delta\eta\lambda.$$

$$-3\alpha < -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 3} < -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 3} < 0, \delta\eta\lambda.$$

$$0 < 2\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 3} < 2\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 3} < 3\alpha, \delta\eta\lambda.$$

$$0 < 2\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 3} \quad \text{ή} \quad \sqrt{\alpha^2 - 3} < 2\alpha \quad \text{ή} \quad \alpha^2 - 3 < 4\alpha^2 \quad \text{ή} \quad -3 <$$

$$< 3\alpha^2 \quad \text{ή} \quad -1 < \alpha^2 \quad (\alpha \text{ ροφανές}) \quad \text{και} \quad 2\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 3} <$$

$$< 2\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 3} \quad \text{ή} \quad -\sqrt{\alpha^2 - 3} < \sqrt{\alpha^2 - 3} \quad (\alpha \text{ ροφανές}) \quad \text{και}$$

$$2\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 3} < 3\alpha \quad \text{ή} \quad \sqrt{\alpha^2 - 3} < \alpha \quad \text{ή} \quad \alpha^2 - 3 < \alpha^2 \quad \text{ή} \quad -3 < 0.$$

Αν $\alpha < 0$: τότε $0 < x_{2\sigma.υ.} < x_{1\sigma.υ.} < x_0 < \frac{\pi}{2}$. Η

απόδειξη γίνεται παρομοίως.

ΟΣΤΕ: η y_2 είναι κοίτη στα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2}, x_{2\sigma.υ.})$ και $(x_{1\sigma.υ.}, \frac{\pi}{2})$, κυρτή δε' στο $(x_{2\sigma.υ.}, x_{1\sigma.υ.})$.

Τά σ.υ. είναι $[x_{2\sigma.υ.}, y_2(x_{2\sigma.υ.})]$ και $[x_{1\sigma.υ.}, y_2(x_{1\sigma.υ.})]$.

Τό min είναι στο σημείο $(x_0, 0)$.

ΕΥΡΕΣΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΠΟΥ ΤΩΝ σ.υ.

Έν τής $3\epsilon\varphi^2 x_{\sigma.υ.} + 2\alpha\epsilon\varphi x_{\sigma.υ.} + 1 = 0 \rightsquigarrow$

$$\alpha = \frac{-1 - 3\varepsilon\varphi^2 x_{\sigma.u.}}{2\varepsilon\varphi x_{\sigma.u.}}. \text{ Καί } y_{\sigma.u.} = (\alpha + \varepsilon\varphi x_{\sigma.u.})^2 =$$

$$= \left(\frac{-1 - 3\varepsilon\varphi^2 x_{\sigma.u.}}{2\varepsilon\varphi x_{\sigma.u.}} + \varepsilon\varphi x_{\sigma.u.} \right)^2 = \dots = \left(\frac{1 + \varepsilon\varphi^2 x_{\sigma.u.}}{2\varepsilon\varphi x_{\sigma.u.}} \right)^2.$$

ΩΣΤΕ ό γ.τ. τών σ.υ. είναι ή

$$y = \left(\frac{1 + \varepsilon\varphi^2 x}{2\varepsilon\varphi x} \right)^2$$

17 Γνωστές τής $y_1 = \frac{1 + \varepsilon\varphi^2 x}{2\varepsilon\varphi x}$ (γραφική)

νά γίνει ή γραφική παράσταση τής $y_2 = y_1^2$.

Μελέτη τής $y_1 = \frac{1 + \varepsilon\varphi^2 x}{2\varepsilon\varphi x} \mid x \neq 0.$

"Αν $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \rightsquigarrow y_1 < 0$. "Αν $0 < x < \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow y_1 > 0$. "Αν $x \rightarrow 0^- \rightsquigarrow y_1 \rightarrow -\infty$. "Αν $x \rightarrow 0^+ \rightsquigarrow y_1 \rightarrow +\infty$. "Αν $x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow y_1 \rightarrow \frac{1 + \varepsilon\varphi^2(-\frac{\pi}{2})}{2\varepsilon\varphi(-\frac{\pi}{2})} =$

$$= \frac{1 + \infty}{-\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{άοριστος μορφή. Άρα (μέ κανόνα}$$

Hospital): $y_1 \xrightarrow{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \varepsilon\varphi^2 x)'}{(2\varepsilon\varphi x)'} = \frac{2\varepsilon\varphi x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}}{2 \frac{1}{\sin^2 x}} = \varepsilon\varphi x =$

$$= -\infty. \text{ Έώς, } y_1 \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} +\infty.$$

Είναι, επίσης, $y_1 \neq 0 \quad \forall x \in \left[(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})\right]$.

Από τα τεύχη y_1 :

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \varepsilon \varphi^2 x}{\varepsilon \varphi x} \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon \varphi x} + \varepsilon \varphi x \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\varepsilon \varphi^2 x} \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) = \frac{1}{2 \sin^2 x} \left(-\frac{1}{\varepsilon \varphi^2 x} + 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin^2 x} \frac{-1 + \varepsilon \varphi^2 x}{\varepsilon \varphi^2 x} = \frac{1}{2 \mu^2 x} (-1 + \varepsilon \varphi^2 x) = 0 \leadsto \varepsilon \varphi^2 x = \\ &= 1 \leadsto \varepsilon \varphi x = \pm 1 \leadsto \varepsilon \varphi x = \varepsilon \varphi \left(\pm \frac{\pi}{4} \right) \leadsto x = \pm \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Και } y_1 \left(\pm \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 + \varepsilon \varphi^2 \left(\pm \frac{\pi}{4} \right)}{2 \varepsilon \varphi \left(\pm \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1 + 1}{\pm 2} = \frac{2}{\pm 2} = \pm 1.$$

Δηλ. τὰ σημεία $(-\frac{\pi}{4}, -1)$, $(\frac{\pi}{4}, 1)$ είναι κρίσιμα.

$$\begin{aligned} y_2'' &= \left(\frac{-1 + \varepsilon \varphi^2 x}{2 \mu^2 x} \right)' = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\mu^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu^4 x} 2 \mu x \sin x + \frac{1}{\sin^4 x} 2 \sin x \mu x \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \mu x \sin x \left(\frac{1}{\mu^4 x} + \frac{1}{\sin^4 x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu^4 x} + \frac{1}{\sin^4 x} \right) \mu x^2 = \\ &= 0 \leadsto \mu x^2 = 0 \leadsto 2x = k\pi \leadsto x = \frac{k\pi}{2} \notin \end{aligned}$$

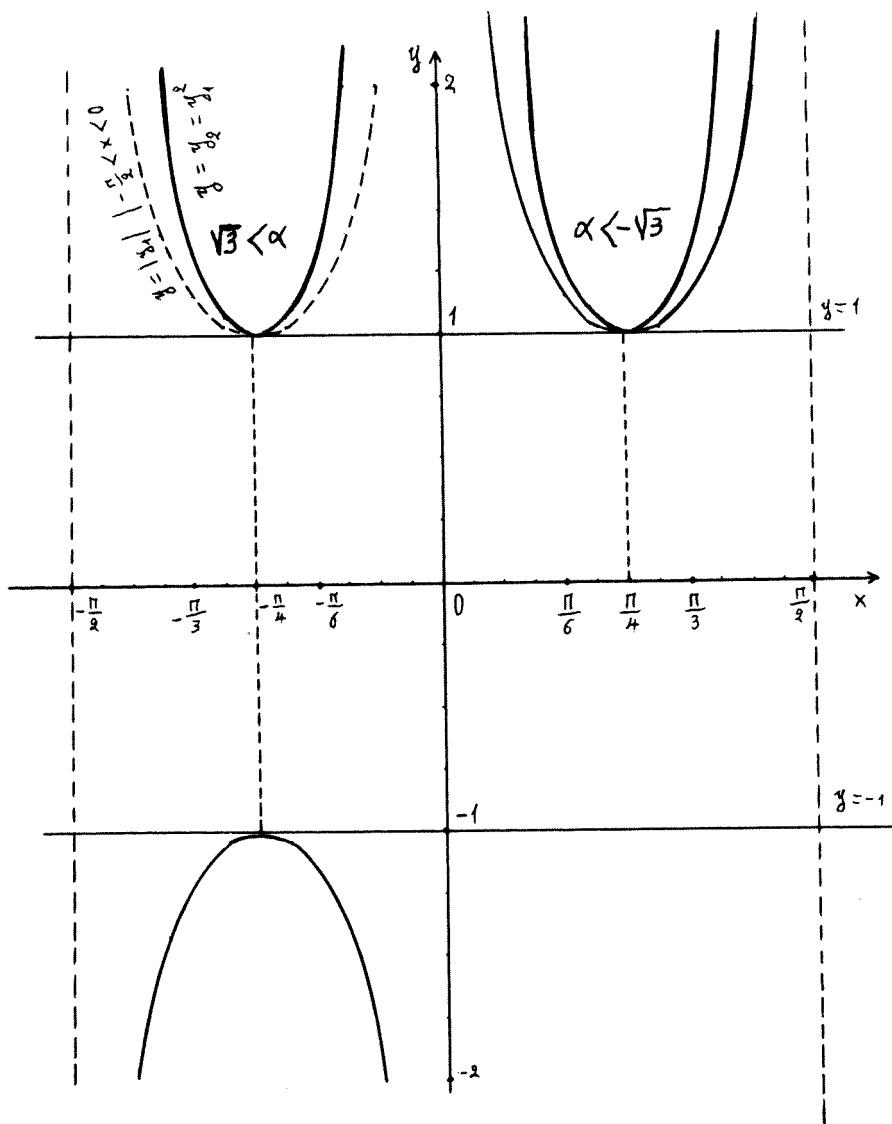
$\left[(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})\right]$. Άρα $\nexists$ σ.κ.

"Αν $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ ή $-\pi < 2x < 0 \leadsto \mu x^2 < 0 \leadsto$

$y_2'' < 0 \leadsto y_2$ κοίτη.

"Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ή $0 < 2x < \pi \rightarrow \sin 2x > 0 \rightarrow y_2'' > 0 \rightarrow y_2$ κοίμη.

"Όσοι στο σημείο $(-\frac{\pi}{4}, -1)$ έχουμε $\max$ και στο $(\frac{\pi}{4}, 1)$ $\min$.



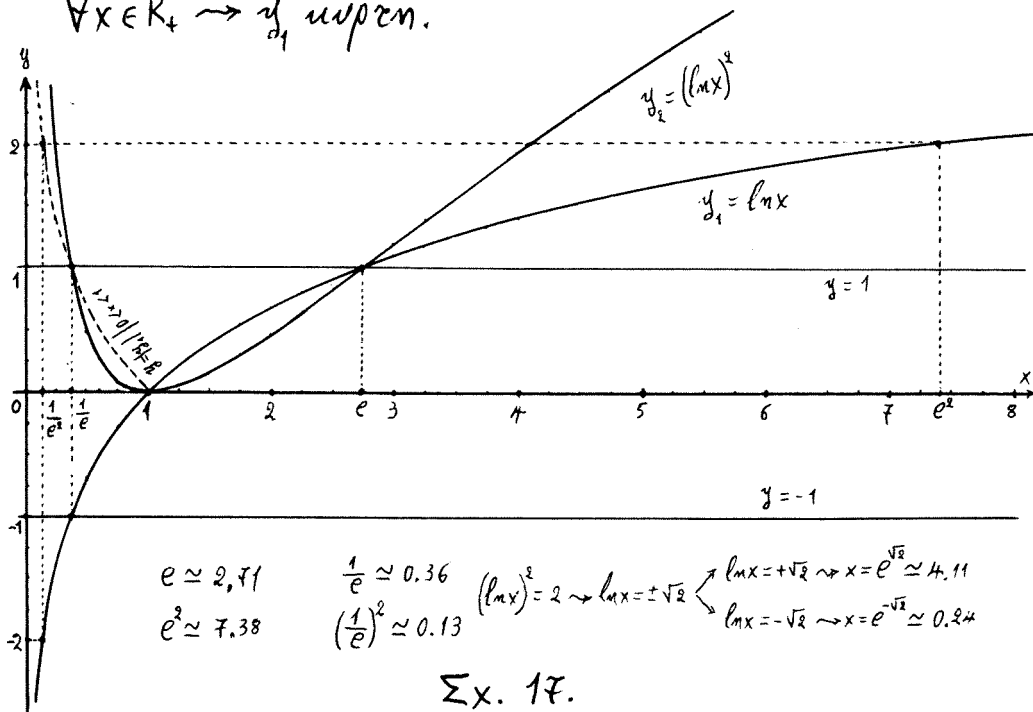
$\Sigma x \cdot 16.$

18 Περνάμε στον γενικό λογάριθμο:

$$y_1 = \ln x, \quad y_2 = (\ln x)^2.$$

$$\text{Είναι } y_1' = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \rightarrow y_1 \uparrow, \quad y_1'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \rightarrow y_1$ κυρτή.



Επίσης, $y_1 = \ln x = 0 = \ln 1 \rightarrow x = 1$, άρα $(1,0) \in y_1$.
 $y_1 = \ln x = 1 = \ln e \rightarrow x = e$, άρα $(e,1) \in y_1$. $y_1 = \ln x = 2 = \ln e^2 \rightarrow x = e^2$, άρα $(e^2,2) \in y_1$. $y_1 = \ln x = -1 = \ln e^{-1} \rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$, άρα $(\frac{1}{e}, -1) \in y_1$. $y_1 = \ln x = -2 = \ln e^{-2} \rightarrow x = e^{-2} = \frac{1}{e^2} = (\frac{1}{e})^2$, άρα $(\frac{1}{e^2}, -2) \in y_1$ κ.ο.κ.

Επίσης, $y_1'(e) = \frac{1}{e} = \varepsilon \varphi \omega_1 \simeq \varepsilon \varphi 20^\circ$, $y_1'(1) = 1 =$

$$= \varepsilon\varphi 45^\circ, \quad y_1' \left(\frac{1}{e} \right) = \frac{1}{1/e} = e = \varepsilon\varphi \omega_2 \simeq \varepsilon\varphi 70^\circ.$$

Ασφαγώς είναι (βλέπε $\S 1$, $\S 2$ α-η, $\S 3$ II α, α₂, β, β₂, δ, δ₂, III δ_η) $y_2 \downarrow$ και κοίτη $\forall x \in (0, 1)$. Διέρχεται από τα σημεία $(0.36, 1)$, $(2.7, 1)$ και το $(1, 0)$ που έχει και το min.

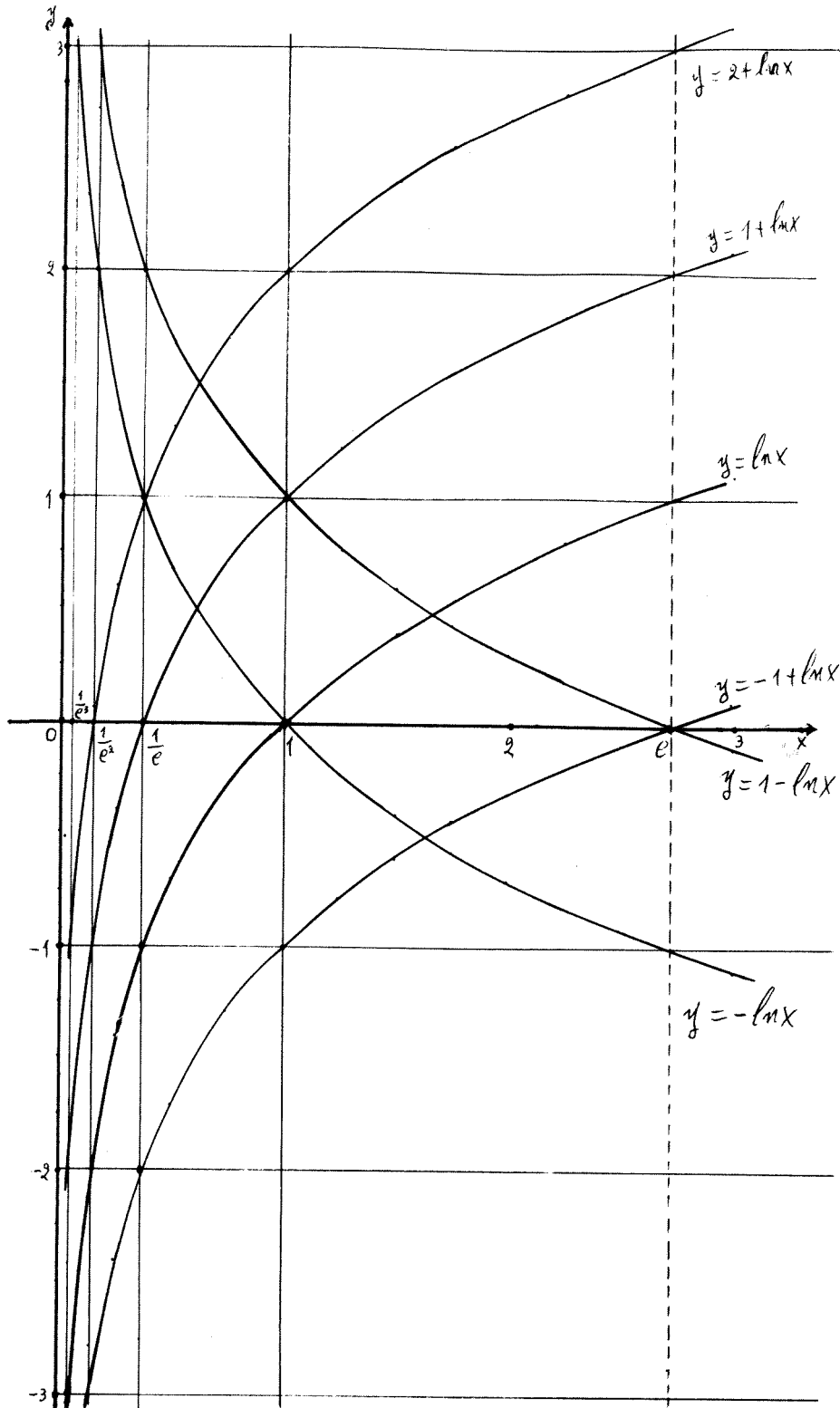
$$\text{Είναι } y_2' = 2 \frac{\ln x}{x} > 0 \quad \forall x > 1 \leadsto y_2 \uparrow \text{ και } y_2' < 0 \quad \forall x \in (0, 1) \leadsto y_2 \downarrow. \text{ Και: } y_2'(1) = \frac{\ln 1}{1} = 0 \text{ και } y_2(1) = (\ln 1)^2 = 0. \text{ Άρα min στο } (1, 0).$$

$$\text{Έως ότου, } y_2'' = 2 \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \dots = \frac{2}{x^2} (1 - \ln x) = 0 \leadsto 1 - \ln x = 0 \leadsto \ln x = 1 = \ln e \leadsto x = e \text{ και } y_2(e) = (\ln e)^2 = 1. \text{ Άρα στο } (e, 1) \text{ έχουμε σ.υ.}$$

Είναι $y_2'' > 0$ ή $1 - \ln x > 0$ ή $\ln x < 1 = \ln e$ ή $x < e \leadsto y_2$ κοίτη στο διάστημα $(0, e)$ και κυρτή στο $(e, +\infty)$.

$$\text{Είναι επίσης, } y_2'(e) = 2 \cdot \frac{\ln e}{e} = 2 \cdot \frac{1}{e} = \varepsilon\varphi \varphi_1 = \varepsilon\varphi 36^\circ, \quad y_2' \left(\frac{1}{e} \right) = 2 \cdot \frac{\ln \frac{1}{e}}{1/e} = -2e = \varepsilon\varphi \varphi_2 = \varepsilon\varphi (-80^\circ).$$

$$\boxed{19} \text{ ΓΕΝΙΚΩΣ: } y_1 = \alpha + \ln x, \quad y_2 = (\alpha + \ln x)^2.$$



$\Sigma x. 18.$

Είναι: $y_1' = \frac{1}{x}$, $y_1'' = -\frac{1}{x^2}$. Δηλ., οι συναρτήσεις y_1 είναι οι θέσεις που παραλαμβάνει η $y = \ln x$ μετακινούμενη «πάνω - κάτω» κατά α .

$$\text{Είναι: } y_2' = 2(\alpha + \ln x) \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \alpha + \ln x = 0 \rightarrow \ln x_0 = -\alpha \rightarrow x_0 = e^{-\alpha}.$$

Άλλά $y_2(x_0) = (\alpha + \ln x_0)^2 = [\alpha + (-\alpha)]^2 = 0$. Είναι δε $y_2'' = 2(f' + ff'') = \dots = \frac{2}{x^2} (1 - \alpha - \ln x)$. Και $y_2''(x_0) = \frac{2}{x_0^2} (1 - \alpha - \ln x_0) = \frac{2}{(e^{-\alpha})^2} [1 - \alpha - (-\alpha)] = 2e^{2\alpha} > 0$. Άρα στο σημείο $(x_0, 0)$ έχουμε το min της y_2 .

Στο σχήμα 18 έχουμε και την $y = -\ln x \rightarrow x = e^{-y}$ και αν θέσουμε $x = x_0$ και $y = \alpha \rightarrow x_0 = e^{-\alpha}$.

Δηλ., αν $\alpha = y = 1$, τότε $x_0 = e^{-\alpha} = e^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.
 "Ότε, στο σημείο $(\frac{1}{e}, 0)$ είναι το min της $y_2 = (1 + \ln x)^2$.
 "Αν $\alpha = y = 2 \rightarrow x_0 = e^{-\alpha} = e^{-2} = e^{-2} = (\frac{1}{e})^2$. "Ότε, στο σημείο $[(\frac{1}{e})^2, 0]$ είναι το min της $y_2 = (2 + \ln x)^2$.
 Έπίσης, αν $\alpha = 0 \rightarrow x_0 = e^{-\alpha} = e^{-0} = e^0 = 1$. "Ότε, στο σημείο $(1, 0)$ είναι το min της $y_2 = (\ln x)^2$. Και αν $\alpha = -1 \rightarrow x_0 = e^{-\alpha} = e^{-(-1)} = e^{(-1)} = e$. "Ότε, στο σημείο $(e, 0)$ είναι το min της $y_2 = (-1 + \ln x)^2$.

ΩΣΤΕ: Άν $\alpha > 0 \leadsto 0 < x_0 < 1$. Άν $\alpha < 0 \leadsto 1 < x_0$. Καί, αν $\alpha = 0$, δηλ. $y_2 = (\ln x)^2$, το min είναι στο σημείο $(1, 0)$.

$$\text{Είναι } y_2'' = \frac{2}{x^2} (1 - \alpha - \ln x) = 0 \leadsto 1 - \alpha - \ln x_{\sigma.u.} = 0 \leadsto \ln x_{\sigma.u.} = 1 - \alpha \leadsto x_{\sigma.u.} = e^{1-\alpha}.$$

$$\text{Καί } y_2(x_{\sigma.u.}) = [\alpha + \ln(x_{\sigma.u.})]^2 = [\alpha + (1 - \alpha)]^2 = 1.$$

Δηλ., ο γεωμετρικός τόπος του σημείου μακρῶς $(x_{\sigma.u.}, 1)$ τῆς y_2 είναι ἡ εὐθεῖα $y = 1$.

ΕΥΡΕΣΗ ΤΟΥ $x_{\sigma.u.}$ ΓΡΑΦΙΚΟΣ: Στο σχή-

μα 18 ἔχομε καί τὴν $y = 1 - \ln x \leadsto \ln x = 1 - y \leadsto x = e^{1-y}$ καί αν δέδομε $x = x_{\sigma.u.}$ καί $y = \alpha \leadsto x_{\sigma.u.} = e^{1-\alpha}$. Δηλ., αν $\alpha = y = 1$, τότε $x_{\sigma.u.} = e^{1-1} = 1$. Ὡστε, τὸ σημείο $(1, 1)$ είναι σημείο μακρῶς τῆς $y_2 = (1 + \ln x)^2$. Άν $\alpha = y = 2 \leadsto x_{\sigma.u.} = e^{1-2} = \frac{1}{e}$. Ὡστε, τὸ σημείο $(\frac{1}{e}, 1)$ είναι σ.υ. τῆς $y_2 = (2 + \ln x)^2$. Ἐπομένως, αν $\alpha = 0 \leadsto x_{\sigma.u.} = e^{1-0} = e$. Ὡστε, τὸ σημείο $(e, 1)$ είναι

σ.υ. τῆς $y_1 = (\ln x)^2$. Καί ἂν $\alpha = -1 \leadsto x_{\sigma.υ.} = e^{1-(-1)} = e^2$. Ὡστε, τὸ σημεῖο $(e^2, 1)$ εἶναι σ.υ. τῆς $y_2 = (-1 + \ln x)^2$.

ΟΣΤΕ: Ἄν $\alpha > 0 \leadsto$ τὸ σ.υ. πινεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας $y=1$ μέ $0 < x_{\sigma.υ.} < e$. Ἄν $\alpha < 0$, πινεῖται ὡς ἐπὶ τῆς $y=1$ μέ $e < x_{\sigma.υ.}$. Καί, ἂν $\alpha = 0$, δηλ. $y_2 = (\ln x)^2$, τὸ σ.υ. εἶναι τὸ $(e, 1)$.

Ἐπίσης, εἶναι $y_1(x_{\sigma.υ.}) = \alpha + \ln(x_{\sigma.υ.}) = \alpha + (1-\alpha) = 1$. Δηλ., ἐκεῖ πού τέμνει ἡ y_1 τὴν εὐθεῖαν $y=1$ ἔχομε καὶ τὸ σ.υ. τῆς y_2 .

Ἐπίσης, ἂν $0 < x < x_{\sigma.υ.}$ ἢ $\ln x < \ln(x_{\sigma.υ.})$ ἢ $-\ln x > -\ln(x_{\sigma.υ.})$ ἢ $1-\alpha-\ln x > 1-\alpha-\ln(x_{\sigma.υ.}) = 0 \leadsto y_2'' = \frac{2}{x^2} (1-\alpha-\ln x) > 0$. Ἀρα y_2 κοίτη. Καί, ἂν $x_{\sigma.υ.} < x \leadsto y_2$ κυρτή.

Ἐπίσης, $y_2'(x_{\sigma.υ.}) = 2(\alpha + \ln x_{\sigma.υ.}) \frac{1}{x} = 2[\alpha + (1-\alpha)] = \frac{1}{x_{\sigma.υ.}} = \frac{2}{x_{\sigma.υ.}} = \frac{2}{e^{1-\alpha}} = 2e^{\alpha-1} > 0$.

Δηλ., ἡ μέγιστη τῆς ἐφαπτομένης τῆς y_2 στο σημεῖο
καμωῆς τῆς εἶναι ἐφω $= 2e^{\alpha-1} \leadsto \omega = \log_{\text{ef}}(2e^{\alpha-1}) > 0$.

Ἐπίσης, ἂν $y_2 = (\alpha + \ln x)^2 = 1 \leadsto \alpha + \ln x =$
 $= \pm 1$ ἢ $\ln x = \pm 1 - \alpha$ ἢ $x = e^{\pm 1 - \alpha}$. Δηλ. ἡ y_2
τέμνει τὴν ἐνδιάμ $y=1$ σὲ δύο σημεία μέτε
καυμένες $x_1 = e^{-1-\alpha}$ καὶ $x_2 = e^{1-\alpha} = x_{\text{σ.α.}}$. Εἰ-
ναι δέ $x_1 < x_2$, διότι $e^{-1-\alpha} < e^{1-\alpha}$ ἢ $-1-\alpha <$
 $< 1-\alpha$ ἢ $-1 < 1$.

Εἶναι ἐπίσης, $y_2(1) = (\alpha + \ln 1)^2 = \alpha^2$.

20 Καὶ τώρα στὴν ἐνδεχόμενη συνάρτηση:

$$y_1 = e^x, y_2 = (e^x)^2 = e^{2x}.$$

$$\text{Εἶναι } y_1' = e^x > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \leadsto y_1 \uparrow, y_1'' =$$

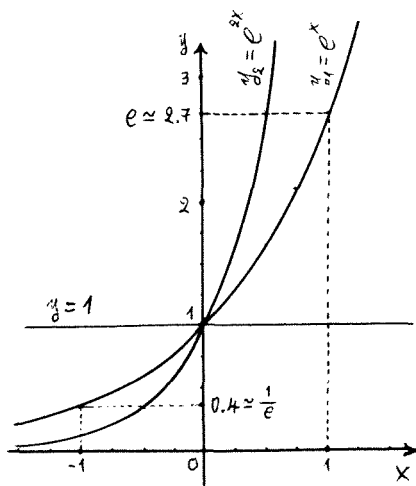
$$= e^x > 0 \leadsto y_1 \text{ κοίτη,}$$

$$y_1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ καὶ}$$

$$y_1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0^+, \text{ καθὼς}$$

$$\text{καὶ } y_1(0) = 1, y_1(1) =$$

$$= e, y_1(-1) = \frac{1}{e}.$$

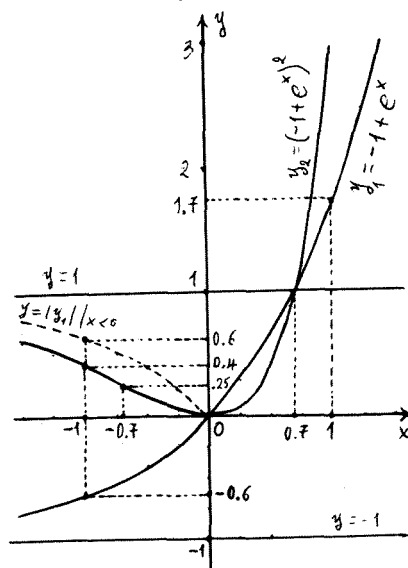


Σχ. 19.

Ἐπίσης, $y_2' = 2e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow y_2 \uparrow$; $y_2'' = 4e^{2x} > 0 \rightarrow y_2$ κοίμη, $y_2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ καὶ $y_2 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0^+$ ὡς καὶ $y_2(0) = 1$, $y_2(1) = e^2$, $y_2(-1) = (\frac{1}{e})^2 = \frac{1}{e^2}$.
(βλέπε: § 1, § 2 θ, γ, δ, η, θ, § 3 II α, α₁).

21 Ἐπίσης, $y_1 = -1 + e^x$, $y_2 = (-1 + e^x)^2$.

Εἶναι $y_1' = e^x > 0$
 $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow y_1 \uparrow$, $y_1'' = e^x > 0 \rightarrow y_1$ κοίμη, $y_1(0) = 0$, $y_1(1) = -1 + e$,
 $y_1(-1) = -1 + e^{-1} = -1 + \frac{1}{e}$,
 $y_1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $y_1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1^+$.



Σχ. 20.

Ἐπίσης, $y_2' = 2(-1 + e^x)e^x = 0 \rightarrow$
 $-1 + e^x = 0 \rightarrow e^x = 1 = e^0$
 $\rightarrow x = 0$, $y_2(0) = 0$. Ἀρα στὸ $(0, 0)$ ἔχομε min.

(βλέπε: § 1, § 2 α, β, γ, δ, ε, η, θ, § 3 II α, α₁, β, β₁, γ).

Εἶναι ἐπίσης, $y_2'' = \dots = 2e^x(-1 + 2e^x) = 0 \rightarrow$
 $-1 + 2e^x = 0 \rightarrow e^{x_{\text{στ.}}\text{.}} = \frac{1}{2} \rightarrow x_{\text{στ.}}\text{.}} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \approx -0.7$.

καὶ $y_2(x_{\text{στ.}}\text{.}}) = (-1 + e^{x_{\text{στ.}}\text{.}})^2 = (-1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} = 0.25$.

Ὅστε τὸ σημεῖο $(-0.7, 0.25)$ εἶναι σημεῖον καμ-

ώνος, διότι $y'''(x_{\text{σ.μ.}}) \neq 0$. Και,

Αν $x > -\ln 2 = \ln 2^{-1} = \ln \frac{1}{2}$ ή $e^x > e^{\ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
ή $2e^x > 1$ ή $-1 + 2e^x > 0 \leadsto y_2'' > 0 \leadsto y_2$ κοίλη και
πυκνώνει αν $x < -\ln 2$.

Εξώσης, $y_2(1) = (-1 + e)^2 \simeq 2.9$, $y_2(-1) = (-1 + e^{-1})^2 =$
 $= (-1 + \frac{1}{e})^2 \simeq 0.4$, $y_1 = -1 + e^x = 1 \leadsto e^x = 2 \leadsto x = \ln 2 \simeq$
 $\simeq 0.7$, $y_1(-1) = -1 + e^{-1} = -1 + \frac{1}{e} \simeq -0.6$, $y_1(x_{\text{σ.μ.}}) = -1 +$
 $+ e^{x_{\text{σ.μ.}}} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

29 ΓΕΝΙΚΩΣ: $y_1 = \alpha + e^x$, $y_2 = (\alpha + e^x)^2$.

Είναι $y_1' = e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R} \leadsto y_1 \uparrow$, $y_1'' = e^x > 0$
 $\leadsto y_1$ κοίλη, $y_1(0) = \alpha + e^0 = \alpha + 1$, άρα τέμνει τον
άξονα τεταγμένων στο σημείο $(0, \alpha + 1)$, $y_1(1) =$
 $= \alpha + e^1$, άρα διέρχεται από το σημείο $(1, \alpha + e)$,
 $y_1(-1) = \alpha + e^{-1}$, άρα διέρχεται από το $(-1, \alpha + \frac{1}{e})$,
 $y_1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $y_1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \alpha^+$, δηλ. ή $y = \alpha$ είναι ά-
σύμπτωτος.

Περί ή y_1 είναι ή $y = e^x$ μετατοπισμένη
κατά α (προς τα «πάνω» αν $\alpha > 0$, προς τα «κάτω»
αν $\alpha < 0$).

Εξώσης, $y_2' = 2(\alpha + e^x)e^x = 0 \leadsto \alpha + e^x = 0$

$\leadsto e^{x_0} = -\alpha \leadsto x_0 = \ln(-\alpha)$ και ισχύει αν $\alpha < 0$. Και $y_2(x_0) = (\alpha + e^{x_0})^2 = (\alpha - \alpha)^2 = 0$. Άρα στο $(x_0, 0)$ έχουμε min.

Είναι έωθιστος, $y_2'' = \dots = 2e^x(\alpha + 2e^x) = 0 \leadsto \alpha + 2e^x = 0 \leadsto e^{x_{\text{σ.μ.}}} = -\frac{\alpha}{2} \leadsto x_{\text{σ.μ.}} = \ln(-\frac{\alpha}{2})$ και ισχύει αν $\alpha < 0$. Και $y_2(x_{\text{σ.μ.}}) = (\alpha + e^{x_{\text{σ.μ.}}})^2 = (\alpha - \frac{\alpha}{2})^2 = \frac{\alpha^2}{4}$.

Όποτε το σημείο $(x_{\text{σ.μ.}}, \frac{\alpha^2}{4})$ είναι σ.μ., μ.γ.ω.

Έυ τής $e^{x_{\text{σ.μ.}}} = -\frac{\alpha}{2} \leadsto \alpha = -2e^{x_{\text{σ.μ.}}}$. Άρα $y_{\text{σ.μ.}} = (\alpha + e^{x_{\text{σ.μ.}}})^2 = (-2e^{x_{\text{σ.μ.}}} + e^{x_{\text{σ.μ.}}})^2 = e^{2x_{\text{σ.μ.}}}$.

ΟΣΤΕ: Ο γεωμετρικός τόπος των σ.μ. είναι η $y = e^{2x}$ (βλέπε σχ. 19).

23 ΜΙΑ ΑΛΛΗ ΠΤΥΧΗ:

(A) Δίδεται η συνάρτηση $y = x^{\varpi} \mid x, \varpi \in \mathbb{R}_+$.

Κατ' αρχήν είναι $y' = \varpi x^{\varpi-1} > 0$. Άρα $y \uparrow$.

Άν $1 < x$ και $0 < \varpi_1 < \varpi_2 \leadsto x^{\varpi_1} < x^{\varpi_1}(x^{\varpi_2-\varpi_1}) = x^{\varpi_2}$.

Διότι: $\varpi_2 - \varpi_1 > 0$, $1 < x$, $y = x^{\varpi_2-\varpi_1} \uparrow$ και $y(1) = 1^{\varpi_2-\varpi_1} = 1$, άσχε $x^{\varpi_2-\varpi_1} > 1$.

Παράδειγμα: $x^2 < x^3 \mid 1 < x$ και $x^{\frac{1}{3}} < x^{\frac{1}{2}} \mid 1 < x$.

Έωθιστος.

Άν $0 < x < 1$ και $0 < \varpi_1 < \varpi_2 \leadsto x^{\varpi_1} > x^{\varpi_1}(x^{\varpi_2-\varpi_1}) = x^{\varpi_2}$. Διότι: $\varpi_2 - \varpi_1 > 0$, $0 < x < 1$, $y = x^{\varpi_2-\varpi_1} \uparrow$ και $y(1) = 1^{\varpi_2-\varpi_1} = 1$, άσχε $x^{\varpi_2-\varpi_1} < 1$.

Παράδειγμα: $x^2 > x^3 \mid 0 < x < 1$ και $x^{\frac{1}{3}} > x^{\frac{1}{2}} \mid 0 < x < 1$.

(A₂) Δίδεται $y = x^{\frac{k}{\lambda}}$, $\frac{k}{\lambda}$ ανάγωγο κλάσμα.

Αν k άρτιος $\leadsto$ η y άρτια.

Παράδειγμα: $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$ και $y = x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4}$.

Σημείωση: Άρτιες είναι και οι: $y = \sqrt{|x|}$,

$y = \sqrt[3]{|x|}$, $y = \sqrt[3]{|x|^5}$, κ.λ.ω.

Αν k, λ περιττοί $\leadsto$ η y είναι περιττή.

Παράδειγμα: $y = x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3}$, $y = x^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^5}$. και,

Αν k περιττός, λ άρτιος $\leadsto$ η y δεν ορίζεται για $x < 0$.

Παράδειγμα: $y = x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$, $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$.

(B₁) Δίδεται η συνάρτηση $y = x^{-\omega} \mid x, \omega \in \mathbb{R}_+$.

κατ' αρχήν είναι $y' = -\omega x^{-\omega-1} < 0$. άρα $y \downarrow$.

Αν $1 < x$ και $0 < \omega_1 < \omega_2 \leadsto x^{-\omega_1} > x^{-\omega_2} \cdot (x^{-(\omega_2-\omega_1)}) = x^{-\omega_2} \cdot \text{διότι: } \omega_2 - \omega_1 > 0, 1 < x, y = x^{-(\omega_2-\omega_1)} \downarrow \text{ και } y(1) = 1^{-(\omega_2-\omega_1)} = 1, \text{ ώστε } x^{-(\omega_2-\omega_1)} < 1.$

Παράδειγμα: $x^{-2} > x^{-3}$ ή $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{x^3} \mid 1 < x$,
 $x^{-\frac{1}{3}} > x^{-\frac{1}{2}}$ ή $\frac{1}{x^{1/3}} > \frac{1}{x^{1/2}}$ ή $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}} \mid 1 < x$.

Επίσης:

Αν $0 < x < 1$ και $0 < \omega_1 < \omega_2 \leadsto x^{-\omega_1} < x^{-\omega_2} \cdot (x^{-(\omega_2-\omega_1)}) =$

$$= x^{-\omega_2} \cdot \text{δίνου: } \omega_2 - \omega_1 > 0, 0 < x < 1, y = x^{-(\omega_2 - \omega_1)} \downarrow$$

$$\text{και } y(1) = 1^{-(\omega_2 - \omega_1)} = 1, \text{ ώστε } x^{-(\omega_2 - \omega_1)} > 1.$$

$$\text{Παράδειγμα: } x^{-2} < x^{-3} \text{ ή } \frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^3} \mid 0 < x < 1$$

$$\text{και } x^{-\frac{1}{3}} < x^{-\frac{1}{2}} \text{ ή } \frac{1}{x^{1/3}} < \frac{1}{x^{1/2}} \text{ ή } \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \mid 0 < x < 1.$$

(B₂) Δίδεται $y = x^{-\frac{k}{\lambda}}$, $\frac{k}{\lambda}$ ανάγωγο κλάσμα.

"Αν κ άρτιος $\leadsto$ ή y είναι άρτία.

$$\text{Παράδειγμα: } y = x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, y =$$

$$= x^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{x^{4/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

"Αν κ, λ περιττοί $\leadsto$ ή y είναι περιττή.

$$\text{Παράδειγμα: } y = x^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{x^{3/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}, y =$$

$$= x^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{x^{5/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}. \text{ Και,}$$

"Αν κ περιττός, λ άρτιος $\leadsto$ ή y δεν ορίζεται για $x < 0$.

$$\text{Παράδειγμα: } y = x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{x^{3/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}, y = x^{-\frac{5}{4}} =$$

$$= \frac{1}{x^{5/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}.$$

[24] Είναι $y_1 = x^\omega$ και $y_2 = (x^\omega)^\omega = x^{2\omega} \mid x, \omega \in \mathbb{R}_+$.

Είναι $y_1' = \omega x^{\omega-1} > 0 \leadsto y_1 \uparrow$ και $y_1'' =$

$$= \omega \cdot (\omega-1) x^{\omega-2}. \text{ Όσοτε:}$$

(I) "Αν $\omega-1 > 0$, δηλ. $1 < \omega$, τότε $y_1'' > 0 \leadsto y_1$

κοίμη. Και, $y_2' = 2\omega x^{2\omega-1} > 0 \leadsto y_2 \uparrow$ και $y_2'' =$

$= 2\omega(2\omega-1)x^{2\omega-2} > 0$ · διότι έμ τής $1 < \omega \rightarrow 2 < 2\omega$
 ή $0 < 1 < 2\omega-1$. Άρα ή y_2 είναι ποίγη.

(Βλέπε: § 1, § 2 α, β, γ, δ, η, § 3 I γ, II α, α₁).

(II) "Αν $\omega-1 < 0$, δηλ. $0 < \omega < 1$, τότε $y_1'' < 0 \rightarrow$
 y_1 κυρτή. Καί $y_2' = 2\omega x^{2\omega-1} > 0 \rightarrow y_2 \uparrow$ καί $y_2'' =$
 $= 2\omega(2\omega-1)x^{2\omega-2}$. Όπότε:

(II₁) "Αν $2\omega-1 > 0$, δηλ. $\frac{1}{2} < \omega < 1$, τότε $y_2'' > 0 \rightarrow$
 y_2 ποίγη.

(II₂) "Αν $2\omega-1 < 0$, δηλ. $0 < \omega < \frac{1}{2}$, τότε $y_2'' < 0 \rightarrow$
 y_2 κυρτή.

Παράδειγμα: "Η $y_1 = x^{2/3}$ είναι κυρτή ενώ ή
 $y_2 = y_1^2 = (x^{2/3})^2 = x^{4/3}$ είναι ποίγη. Έπίσης, ή $y_1 =$
 $= x^{2/5}$ είναι κυρτή καί ή $y_2 = y_1^2 = (x^{2/5})^2 = x^{4/5}$ είναι
 ωάγη κυρτή.

(II₃) "Αν $2\omega-1 = 0 \rightarrow \omega = \frac{1}{2}$, δηλ. $y_1 = x^{1/2} \rightarrow y_2 =$
 $= y_1^2 = (x^{1/2})^2 = x$, δηλ. εύθεία.

(Βλέπε: § 1, § 2 α, β, γ, δ, η, § 3 II α, α₂, α₂₁, α₂₂,
 III δ, δ₂).

(III) "Αν $\omega-1 = 0 \rightarrow \omega = 1$, δηλ. $y_1 = x \rightarrow y_2 = y_1^2 =$
 $= x^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 1) $y_1 = -x^{\frac{1}{2}}$ και $y_2 = y_1^2 / x, x \in \mathbb{R}_+$.

2) $y_1 = |x|^{\frac{1}{2}}, y_2 = y_1^2$. 3) $y_1 = -|x|^{\frac{1}{2}}, y_2 = y_1^2$. 4) $y_1 = x^{\frac{1}{2}}$ (σφριζή), $y_2 = y_1^2$. 5) $y_1 = -x^{\frac{1}{2}}$ (σφριζή), $y_2 = y_1^2$.

25 Είναί $y_1 = \alpha + \sqrt{x} = \alpha + x^{\frac{1}{2}}$ και $y_2 = (\alpha + \sqrt{x})^2$.

Έχουμε: $y_1' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} > 0$, άρα $y_1 \uparrow$, και $y_1'' = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} < 0$, άρα y_1 κυρτή.

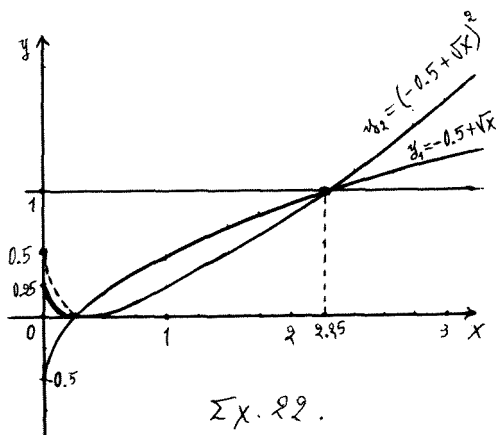
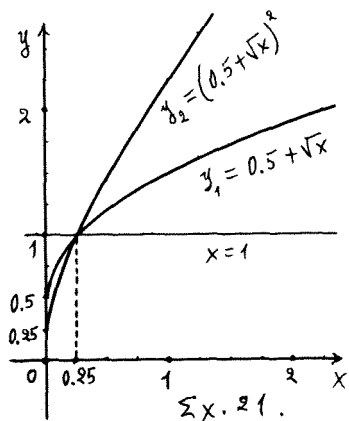
Επίσης, $y_2' = 2(\alpha + \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}$ και $y_2'' = 2(f' + f'') = 2\left[\left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + (\alpha + x^{\frac{1}{2}})\left(-\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}\right)\right] = \dots = -\frac{\alpha}{2} x^{-\frac{3}{2}}$.

Ώστε:

I. Αν $\alpha > 0$ είναι: $y_2' > 0$, άρα $y_2 \uparrow$ και $y_2'' < 0$, άρα y_2 κυρτή.

II. Αν $\alpha < 0$ είναι: $y_2'' > 0$, άρα y_2 κοίλη. Και γι' αυτό και $y_2' = 0$, αν $\alpha + \sqrt{x} = 0 \leadsto \sqrt{x} = -\alpha \leadsto x = \alpha^2$. Δηλ. στο σημείο $(\alpha^2, 0)$ έχουμε $\min$ της y_2 . Διότι $y_2[(-\alpha)^2] = 0$.

26 Είναί $y_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{x}$, $y_2 = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x}\right)^2$, (σχ. 21).



27 Είναί $y_1 = -0.5 + \sqrt{x}$, $y_2 = (-0.5 + \sqrt{x})^2$, ($\alpha \times 22$).

28 ΓΕΝΙΚΑ:

$y_1 = \alpha + x^{\frac{\kappa}{\lambda}}$, $y_2 = (\alpha + x^{\frac{\kappa}{\lambda}})^2$ | κ, λ άμετέροι, θετικοί και $\frac{\kappa}{\lambda}$ ανάγωγο γράμμα.

Είναί $y_1' = \frac{\kappa}{\lambda} x^{\frac{\kappa}{\lambda}-1}$ και $y_1'' = \frac{\kappa}{\lambda} (\frac{\kappa}{\lambda}-1) x^{\frac{\kappa}{\lambda}-2}$.

Επίσης, $y_2' = 2(\alpha + x^{\frac{\kappa}{\lambda}}) \cdot \frac{\kappa}{\lambda} x^{\frac{\kappa}{\lambda}-1}$ και $y_2'' = 2(f' + ff'') =$
 $= 2 \left[\left(\frac{\kappa}{\lambda} x^{\frac{\kappa}{\lambda}-1} \right)^2 + (\alpha + x^{\frac{\kappa}{\lambda}}) \frac{\kappa}{\lambda} (\frac{\kappa}{\lambda}-1) x^{\frac{\kappa}{\lambda}-2} \right] = \dots$

$= 2 \frac{\kappa}{\lambda} x^{\frac{\kappa}{\lambda}-2} \left[(2 \frac{\kappa}{\lambda} - 1) x^{\frac{\kappa}{\lambda}} + \alpha (\frac{\kappa}{\lambda} - 1) \right] =$

$= 2 \frac{\kappa}{\lambda} \frac{x^{\frac{\kappa}{\lambda}}}{x^2} \left[(2 \frac{\kappa}{\lambda} - 1) x^{\frac{\kappa}{\lambda}} + \alpha (\frac{\kappa}{\lambda} - 1) \right].$

A) Είναί $y_2' = 0$, αν $\alpha + x^{\frac{\kappa}{\lambda}} = 0 \leadsto x_0 = \sqrt[\kappa]{(-\alpha)^{\lambda}}$. Και

I. "Αν $\alpha < 0 \leadsto \exists (x_0 > 0) \in \mathbb{R}$.

II. "Αν $\alpha > 0$ και κ, λ περιττοί $\leadsto \exists (x_0 < 0) \in \mathbb{R}$.

"Η, αν κ άρτιος, λ περιττός $\leadsto \nexists x_0 \in \mathbb{R}$. "Η, αν λ άρτιος $\leadsto \exists (x_0 > 0) \in \mathbb{R}$.

Είναί $y_2'' = 2 \frac{\kappa}{\lambda} \cdot \frac{x^{\frac{\kappa}{\lambda}}}{x^2} \left[(2 \frac{\kappa}{\lambda} - 1) x^{\frac{\kappa}{\lambda}} + \alpha (\frac{\kappa}{\lambda} - 1) \right]$. Και, έπειδή $x_0^{\frac{\kappa}{\lambda}} = -\alpha \leadsto$

$y_2''(x_0) = 2 \cdot \frac{\kappa}{\lambda} \cdot \frac{-\alpha}{x_0^2} \left[(2 \frac{\kappa}{\lambda} - 1) (-\alpha) + \alpha (\frac{\kappa}{\lambda} - 1) \right] =$

$= 2 \frac{\kappa}{\lambda} \cdot \frac{-\alpha}{x_0^2} \left[\alpha (-2 \frac{\kappa}{\lambda} + 1 + \frac{\kappa}{\lambda} - 1) \right] = 2 \frac{\kappa}{\lambda} \cdot \frac{-\alpha}{x_0^2} \alpha (-\frac{\kappa}{\lambda}) = 2 \left(\frac{\alpha \kappa}{\lambda x_0} \right)^2 > 0.$

"Άρα, έπειδή $y_2(x_0) = 0$, στο σημείο $(x_0, 0)$

Έχομε $\min$ της y_2 .

Β') Είναι εφίπης $y_2' = 0$, αν $x^{\frac{k}{\lambda}-1} = 0$.

α') Αν $\frac{k}{\lambda} - 1 < 0$, δηλ. $\frac{k}{\lambda} < 1$, $\leadsto x^{\frac{k}{\lambda}-1} = \frac{1}{x^{-(\frac{k}{\lambda}-1)}} \neq 0$.

Δηλ., για $x=0$ δεν έχουμε άκρότατο.

β') Αν $\frac{k}{\lambda} - 1 = 0$, δηλ. $\frac{k}{\lambda} = 1$, $\leadsto x^{\frac{k}{\lambda}-1} = 1 \neq 0$. Δηλ., για $x=0$ δεν έχουμε άκρότατο.

γ') Αν $\frac{k}{\lambda} - 1 > 0$, δηλ. $\frac{k}{\lambda} > 1$, $\leadsto x^{\frac{k}{\lambda}-1} = 0$, αν $x=0$.

Δηλ., για $x=0$ έχουμε κρίσιμο σημείο.

Γ') Είναι $y_2'' = 2 \frac{k}{\lambda} \cdot \frac{x^{k/\lambda}}{x^2} \left[(2 \frac{k}{\lambda} - 1) x^{k/\lambda} + \alpha (\frac{k}{\lambda} - 1) \right]$.

α') Αν $\frac{k}{\lambda} < \frac{1}{2}$ τότε $(2 \frac{k}{\lambda} - 1) < 0$ και έμ της $\frac{k}{\lambda} < \frac{1}{2} < 1 \leadsto (\frac{k}{\lambda} - 1) < 0$. Και,

Μέ $\alpha > 0$ και $x > 0 \leadsto y_2'' < 0$, όωότε y_2 κυρτή. Ένώ, αν $x < 0$ ($x^{k/\lambda}$: φερική) έχομε σημείο καμής.

Μέ $\alpha < 0$ και $x < 0$ ($x^{k/\lambda}$: φερική) $\leadsto y_2'' < 0$, άρα y_2 κυρτή. Ένώ, αν $x > 0$ έχομε β.κ.

β') Αν $\frac{1}{2} < \frac{k}{\lambda} < 1$, τότε είναι $0 < (2 \frac{k}{\lambda} - 1)$ και $(\frac{k}{\lambda} - 1) < 0$. Και,

Μέ $\alpha > 0$ και $x < 0$ ($x^{k/\lambda}$: φερική) $\leadsto y_2'' > 0$ και άρα y_2 κοίλη. Ένώ, αν $x > 0$ έχομε β.κ.

Μέ $\alpha < 0$ και $x > 0 \leadsto y_2'' > 0$ και άρα y_2 κοίλη. Ένώ, αν $x < 0$ ($x^{k/\lambda}$: φερική) έχομε β.κ.

γ') Αν $\frac{1}{2} < 1 < \frac{\kappa}{\lambda}$, τότε είναι $0 < (2\frac{\kappa}{\lambda} - 1)$ και $0 < (\frac{\kappa}{\lambda} - 1)$. Και,

Με $\alpha > 0$ και $x > 0 \leadsto y_2'' > 0$ και άρα y_2 κοίλη. Ένώ, αν $x < 0$ ($x^{\kappa/\lambda}$: ωφριζτή) έχουμε σ.υ.

Με $\alpha < 0$ και $x < 0$ ($x^{\kappa/\lambda}$: ωφριζτή) $\leadsto y_2'' > 0$ και άρα y_2 κοίλη. Ένώ, αν $x > 0$ έχουμε σ.υ.

$$\begin{aligned} \text{Έως της, είναι } y_2'' = 0, \text{ αν } (2\frac{\kappa}{\lambda} - 1)x^{\kappa/\lambda} + \alpha(\frac{\kappa}{\lambda} - 1) &= 0 \\ \leadsto x_{\sigma.υ.}^{\kappa/\lambda} &= -\frac{\alpha(\frac{\kappa}{\lambda} - 1)}{2\frac{\kappa}{\lambda} - 1} \quad | \quad 2\frac{\kappa}{\lambda} - 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Αν $2\frac{\kappa}{\lambda} - 1 = 0$ ή $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{1}{2} \leadsto y_1 = \alpha + x^{1/2} = \alpha + \sqrt{x}$
(βλ. έω 24).

ΤΩΡΑ: Από παραπάνω έχουμε:

$$\alpha = -\frac{2\frac{\kappa}{\lambda} - 1}{\frac{\kappa}{\lambda} - 1} x_{\sigma.υ.}^{\kappa/\lambda}. \text{ Οπότε, εν τούτοις } y_{\sigma.υ.} = (\alpha + x_{\sigma.υ.}^{\kappa/\lambda})^2,$$

$$\text{Έχουμε: } y_{\sigma.υ.} = \left(-\frac{2\frac{\kappa}{\lambda} - 1}{\frac{\kappa}{\lambda} - 1} x_{\sigma.υ.}^{\kappa/\lambda} + x_{\sigma.υ.}^{\kappa/\lambda} \right)^2 = \dots = \left(\frac{\kappa}{\lambda - \kappa} x_{\sigma.υ.}^{\kappa/\lambda} \right)^2.$$

Ώστε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων καμιάς των y_2 είναι:

$$y = \left(\frac{\kappa}{\lambda - \kappa} \right)^2 x^{\frac{2\kappa}{\lambda}}$$

29 $y_1 = 1 + x^{1/3}$, ($x^{1/3}$: άριστη) και $y_2 = (1 + x^{1/3})^2$,
(είναι $\frac{1}{3} = \frac{\kappa}{\lambda} < \frac{1}{2}$).

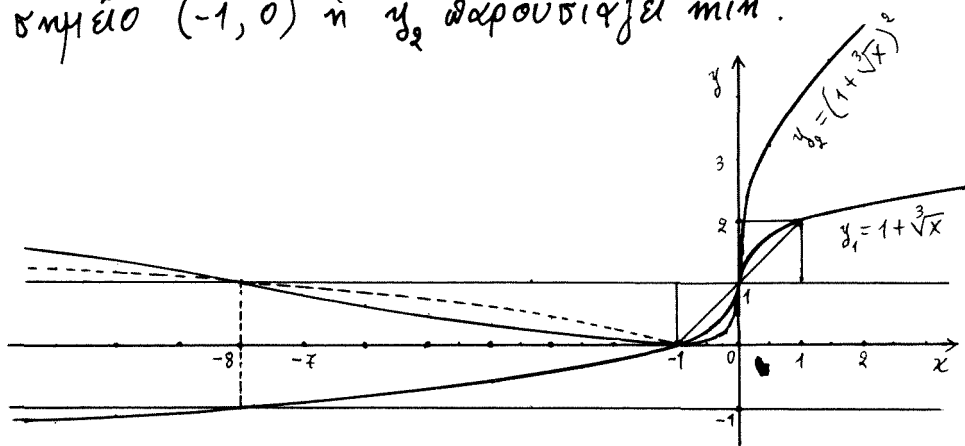
Είναι $y_1' = \frac{1}{3} x^{-2/3} > 0$, άρα $y_1 \uparrow$, και $y_1'' = -\frac{2}{9} x^{-5/3}$.

άρα: y_1 κυρτή για $x > 0$ και κοίλη για $x < 0$.

Έως ότου, $y_2' = 2(1 + x^{1/3}) \frac{1}{3} x^{-2/3}$ και $y_2'' = 2(f' + ff'') =$
 $= 2 \left[\frac{1}{9} x^{-4/3} + (1 + x^{1/3}) \left(-\frac{2}{9} x^{-5/3} \right) \right] = \dots = -\frac{2}{9} x^{-4/3} (2x^{-1/3} + 1)$.

Είναι δε $y_2' = 0$, άν $1 + x^{1/3} = 0 \leadsto x^{1/3} = -1 \leadsto x = -1$.

Άλλα $y_2''(-1) = -\frac{2}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{(-1)^4}} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{-1}} + 1 \right) > 0$. Άρα, στο
σημείο $(-1, 0)$ η y_2 παρουσιάζει min.



Σχ. 23.

Έως ότου, είναι $y_2'' = 0$, άν $2x^{-1/3} + 1 = 0$ ή $\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = -1$
ή $\sqrt[3]{x} = -2$ ή $x_{\text{σταθ.}} = -8$. Και $y_2(-8) = [1 + (-8)^{1/3}]^2 =$
 $= (1 + \sqrt[3]{-8})^2 = (1 - 2)^2 = 1$. Όστε, στο σημείο $(-8, 1)$
έχουμε σημείο καμπής.

$$\boxed{30} \quad y_1 = -1 + x^{1/3}, \quad y_2 = (-1 + x^{1/3})^2.$$

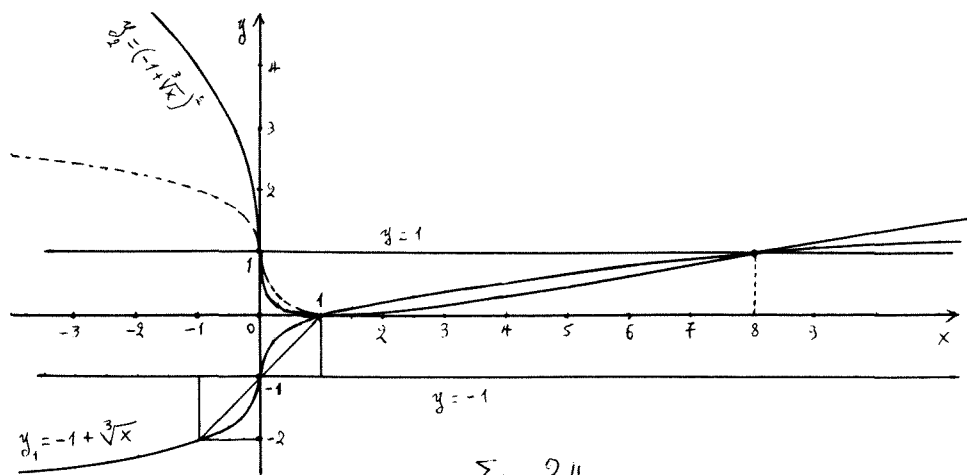
Είναι $y_1' = \frac{1}{3} x^{-2/3} > 0 \leadsto y_1 \uparrow$, $y_1'' = -\frac{2}{9} x^{-5/3}$. άρα:

y_1 κυρτή για $x > 0$ και κοίμη για $x < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Έσθις, } y_2' &= 2(-1 + x^{1/3}) \frac{1}{3} x^{-2/3} \text{ και } y_2'' = \dots \\ &= \frac{2}{9} x^{-5/3} (2x^{1/3} - 1). \end{aligned}$$

Είναι δε $y_2' = 0$, αν $-1 + x^{1/3} = 0 \leadsto x^{1/3} = 1 \leadsto x = 1$.

Άλλα $y_2''(1) = \frac{2}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{1^4}} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{1}} - 1 \right) > 0$. Άρα στο σημείο $(1, 0)$ η y_2 παρουσιάζει min.



Έσθις, είναι $y_2'' = 0$, αν $2x^{-1/3} - 1 = 0 \leadsto \sqrt[3]{x} = 2 \leadsto x_{\text{σημ}} = +8$. Και $y_2(8) = (-1 + 8^{1/3})^2 = 1$. Όσοε στο σημείο $(8, 1)$ έχουμε σημείο καμπής.

$$\boxed{31} \quad y_1 = 1 + x^{3/5} \quad (x^{3/5}: \text{ωεριζών}), \quad y_2 = (1 + x^{3/5})^2,$$

(Είναι $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} = \frac{k}{\lambda} < 1$).

Είναι $y_1' = \frac{3}{5} x^{-2/5} > 0 \leadsto y_1 \uparrow, y_1'' = -\frac{6}{25} x^{-7/5}$, άρα:

y_1 κυρτή για $x > 0$ και κοίτη για $x < 0$.

Έως ότου, $y_2' = 2(1 + x^{3/5}) \frac{3}{5} x^{-2/5}$ και $y_2'' = 2(f' + f'') =$
 $= \dots = \frac{6}{25} x^{-7/5} (x^{3/5} - 2).$

Είναι δε $y_2' = 0$, αν $1 + x^{3/5} = 0 \leadsto x^{3/5} = -1 \leadsto x = -1$.

Άλλά $y_2''(-1) = \frac{6}{25} \frac{1}{\sqrt[5]{(-1)^5}} (\sqrt[5]{(-1)^5} - 2) = \frac{6}{25} \frac{1}{-1} (-1 - 2) > 0$.

Άρα στο σημείο $(-1, 0)$ η y_2 παρουσιάζει min.

Έως ότου, είναι $y_2' = 0$, αν $x^{3/5} - 2 = 0 \leadsto x^{3/5} = 2 \leadsto$
 $\leadsto x_{\text{σταθ.}} = 2^{5/3} \approx 3.2$. Και $y_2(2^{5/3}) = [1 + (2^{5/3})^{3/5}]^2 = 9$.

Ωστε στο σημείο $(3.2, 9)$ έχουμε β.μ.

$$\boxed{32} \quad y_1 = -1 + x^{3/5}, \quad y_2 = (-1 + x^{3/5})^2.$$

Είναι $y_1' = \frac{3}{5} x^{-2/5} > 0 \leadsto y_1 \uparrow, y_1'' = -\frac{6}{25} x^{-7/5}$, άρα:

y_1 κυρτή για $x > 0$ και κοίτη για $x < 0$.

Έως ότου, $y_2' = 2(-1 + x^{3/5}) \frac{3}{5} x^{-2/5}$ και $y_2 = \dots$
 $= \frac{6}{25} x^{-7/5} (x^{3/5} + 2).$

Είναι δε $y_2' = 0$, αν $-1 + x^{3/5} = 0 \leadsto x = 1$. Άλλά

$y_2''(1) = \dots < 0$. Άρα στο $(1, 0)$ η y_2 παρουσιάζει min.

Εξίσωση, είναι $y_2'' = 0$, αν $x^{3/5} + 2 = 0 \leadsto x_{\text{σ.μ.}} \simeq -3.2$. Και $y_2(-2^{5/3}) = \dots = 9$. Όποτε στο σημείο $(-3.2, 1)$ έχουμε σ.μ.

33 $y_1 = 1 + x^3$ (x^3 : περιττή), $y_2 = (1 + x^3)^2$,
(είναι $1 < 3 = \frac{k}{\lambda}$).

Είναι $y_1' = 3x^2 > 0 \leadsto y_1 \uparrow$, $y_1'' = 6x$, άρα: y_1 ποίγη για $x > 0$ και πωρή για $x < 0$, $y_2' = 2(1+x^3)3x^2$,
 $y_2'' = 2(f' + ff'') = 2[9x^4 + (1+x^3)6x] = 6x(5x^3 + 2)$.

Είναι δέ $y_2' = 0$, αν $1 + x^3 = 0 \leadsto x = -1$. Άλλά $y_2''(-1) > 0$. Άρα στο σημείο $(-1, 0)$ η y_2 παρουσιάζει min.

Εξίσωση, είναι $y_2' = 0$, αν $x = 0$. Άλλά $y_2''(0) = 0$.
Πάμε για $y_2''' = 12 + 120x^3$ και $y_2'''(0) = 12 \neq 0$, $y_2^{(4)} = 360x^2$ και $y_2^{(4)}(0) = 0$. Άρα στο σημείο $(0, 1)$ η y_2 παρουσιάζει σημείο καμπής.

Εξίσωση, είναι $y_2'' = 0$, αν $5x^3 + 2 = 0 \leadsto x_{\text{σ.μ.}} = -\sqrt[3]{\frac{2}{5}} \simeq -0.7$ και $y_2(x_{\text{σ.μ.}}) = 0.36$. Όποτε στο σημείο $(-0.7, 0.36)$ έχουμε σ.μ.

34 $y_1 = -1 + x^3$, $y_2 = (-1 + x^3)^2$.

$$\text{Είναι} \dots y_2' = 2(-1+x^3)3x^2, \quad y_2'' = 6x(5x^3-2).$$

Είναι δε $y_2' = 0$, αν $-1+x^3=0 \leadsto x=1$. Άρα στο σημείο $(1,0)$ η y_2 παρουσιάζει min.

Επίσης, είναι $y_2' = 0$, αν $x=0$. Αλλά $y_2''(0)=0$. Πάμε για $y_2''' = -12 + 120x^3$ και $y_2'''(0) = -12 \neq 0$, $y_2^{(4)} = 360x^2$ και $y_2^{(4)}(0) = 0$. Άρα στο σημείο $(0,-1)$ η y_2 παρουσιάζει σ.υ.

Επίσης, είναι $y_2'' = 0$, αν $5x^3-2=0 \leadsto x_{\text{σ.υ.}} = \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \simeq +0.7$ και $y_2(x_{\text{σ.υ.}}) = 0.36$. Όστε στο σημείο $(0.7, 0.36)$ έχουμε σ.υ.

$$\boxed{35} \quad y_1 = \pm 1 + x, \quad y_2 = (\pm 1 + x)^2.$$

36 Άς εξετάσουμε εν όγλις και την άλλη περίπτωση (όπως 2f).

ΓΕΝΙΚΑ: $y_1 = \alpha + x^{-\frac{k}{j}}, \quad y_2 = (\alpha + x^{-\frac{k}{j}})^2 \mid k, j$

αυέραιοι θετικοί και $\frac{k}{j}$ ανάγωγο κλάσμα.

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } y_1' &= -\frac{k}{j} x^{-\frac{k}{j}-1} = -\frac{k}{j} \frac{1}{x^{\frac{k}{j}+1}} \text{ και } y_1'' = \\ &= -\frac{k}{j} \left(-\frac{k}{j}-1\right) x^{-\frac{k}{j}-2} = \frac{k}{j} \left(\frac{k}{j}+1\right) \frac{1}{x^{\frac{k}{j}+2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Εξίσωση, } y_2' &= 2(\alpha + x^{-\frac{k}{\lambda}}) \left(-\frac{k}{\lambda}\right) x^{-\frac{k}{\lambda}-1} \text{ και } y_2'' = \\ &= 2(f' + ff'') = 2 \left[\frac{k^2}{\lambda^2} x^{-2\frac{k}{\lambda}-2} + (\alpha + x^{-\frac{k}{\lambda}}) \frac{k}{\lambda} \left(\frac{k}{\lambda} + 1\right) x^{-\frac{k}{\lambda}-2} \right] = \\ &= \dots = 2 \frac{k}{\lambda} x^{-\frac{k}{\lambda}-2} \left[\left(2\frac{k}{\lambda} + 1\right) x^{-\frac{k}{\lambda}} + \alpha \left(\frac{k}{\lambda} + 1\right) \right]. \end{aligned}$$

A') Είναι $y_2' = 0$, αν $\alpha + x^{-\frac{k}{\lambda}} = 0 \leadsto x_0 = \frac{1}{\sqrt[k]{(-\alpha)^{\frac{\lambda}{k}}}}$. Και:

I. "Αν $\alpha < 0 \leadsto \exists (x_0 > 0) \in \mathbb{R}$.

II. "Αν $\alpha > 0$ και k, λ περιττοί $\exists (x_0 < 0) \in \mathbb{R}$. "η,
αν k άρτιος, λ περιττός $\nexists x_0 \in \mathbb{R}$. "η, αν λ άρτιος τότε
 $\exists (x_0 > 0) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι } y_2'' &= 2 \frac{k}{\lambda} \frac{x^{-\frac{k}{\lambda}}}{x^2} \left[\left(2\frac{k}{\lambda} + 1\right) x^{-\frac{k}{\lambda}} + \alpha \left(\frac{k}{\lambda} + 1\right) \right]. \text{ Και,} \\ \text{έπειδή } x_0^{-\frac{k}{\lambda}} &= -\alpha \leadsto y_2''(x_0) = 2 \frac{k}{\lambda} \cdot \frac{-\alpha}{x_0^2} \left[\left(2\frac{k}{\lambda} + 1\right) (-\alpha) + \alpha \left(\frac{k}{\lambda} + 1\right) \right] = \\ &= 2 \frac{k}{\lambda} \frac{-\alpha}{x_0^2} \left[\alpha \left(-2\frac{k}{\lambda} - 1 + \frac{k}{\lambda} + 1\right) \right] = 2 \frac{k}{\lambda} \frac{-\alpha}{x_0^2} \alpha \left(-\frac{k}{\lambda}\right) = 2 \left(\frac{\alpha k}{\lambda x_0}\right)^2 > 0. \end{aligned}$$

"Αρα, έπειδή $y_2(x_0) = 0$, στο σημείο $(x_0, 0)$

έχουμε $\min$ της y_2 .

B') Είναι εξίσωση $y_2' = 0$ αν $x^{-\frac{k}{\lambda}-1} = \frac{1}{x^{\frac{k}{\lambda}+1}} = 0$,

όπου αδύνατον.

Γ') Είναι $y_2'' = 2 \frac{k}{\lambda} \cdot \frac{x^{-\frac{k}{\lambda}}}{x^2} \left[\left(2\frac{k}{\lambda} + 1\right) x^{-\frac{k}{\lambda}} + \alpha \left(\frac{k}{\lambda} + 1\right) \right]$.

Άλλά $2\frac{\kappa}{\lambda} + 1 > 0$ και $\frac{\kappa}{\lambda} + 1 > 0$.

α') Μέ $\alpha > 0$ και $x > 0 \leadsto y_2'' > 0$, οπότε y_2 κοίλη· ενώ, αν $x < 0$ ($x^{-\frac{\kappa}{\lambda}}$: φερμένη) έχουμε σ.υ.

β') Μέ $\alpha < 0$ και $x < 0$ ($x^{-\frac{\kappa}{\lambda}}$: φερμένη) $\leadsto y_2'' > 0$, οπότε y_2 κοίλη· ενώ, αν $x > 0$ έχουμε σημείο καμπής.

$$\boxed{37} \quad y_1 = 1 + x^{-1} = 1 + \frac{1}{x}, \quad y_2 = (1 + x^{-1})^2 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2.$$

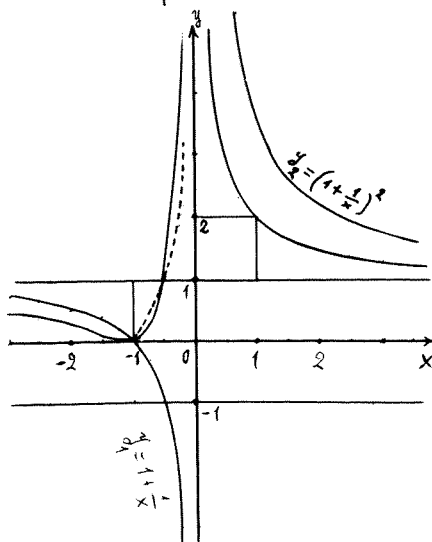
Είναι $y_1' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} < 0 \leadsto y_1 \downarrow$, $y_1'' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$ και, αν $x > 0$ κοίλη, αν $x < 0$ κυρτή.

$$\begin{aligned} \text{Έσθις, } y_2' &= \\ &= 2(1 + x^{-1})(-x^{-2}) = \\ &= -\frac{2}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0, \text{ αν} \end{aligned}$$

$$1 + \frac{1}{x} = 0 \leadsto x = -1$$

$$\text{και } y_2(-1) = 0. \text{ Άρα}$$

το $(-1, 0)$ είναι
κρίσιμο σημείο.



Σχ. 25.

$$\begin{aligned} \text{Έσθις, } y_2'' &= 2(f' + ff'') = \dots = \frac{2}{x^3} \left(\frac{3}{x} + 2\right) = 0, \\ \text{αν } \frac{3}{x} + 2 &= 0 \leadsto x = -\frac{3}{2} \text{ και } y_2\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{-3/2}\right)^2 = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

"Άρα το $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{9})$ είναι σ.κ. Είναι πάλι $y_2''(-1) = \dots = 2 > 0$, άρα στο $(-1, 0)$ παρουσιάζει min η y_2 .

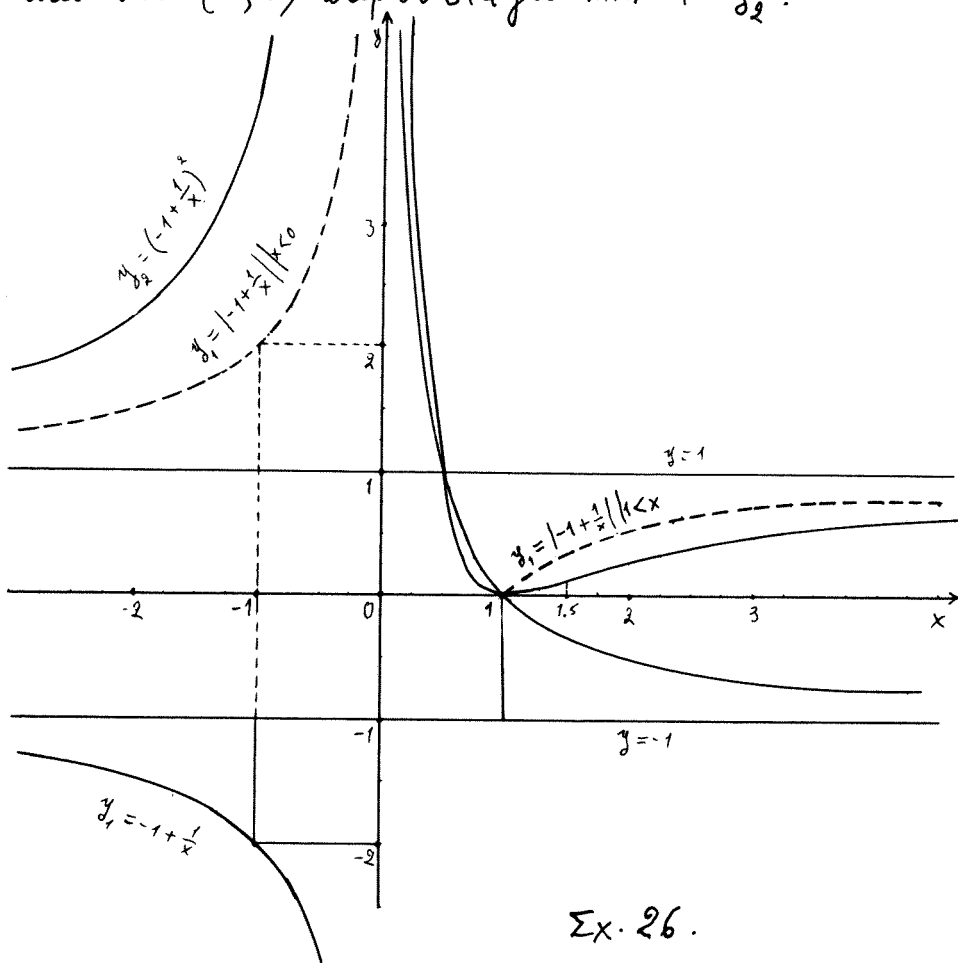
38 $y_1 = -1 + \frac{1}{x}$, $y_2 = (-1 + \frac{1}{x})^2$.

Είναι ... $y_2' = -\frac{2}{x^2}(-1 + \frac{1}{x}) = 0$, άν $-1 + \frac{1}{x} = 0$

$\leadsto x = 1$ και $y_2'' = \frac{2}{x^3}(\frac{3}{x} - 2) = 0$, άν $\frac{3}{x} - 2 = 0 \leadsto$

$x = \frac{3}{2}$. Όπως (όπως 36) το $(\frac{3}{2}, \frac{1}{9})$ είναι σ.κ.

και στο $(1, 0)$ παρουσιάζει min η y_2 .



Σχ. 26.

ΔΕΥΤΕΡΟ ΠΑΚΕΤΟ

ΣΥΓΓΕΝΕΙΑ ΤΩΝ $y_1 = f(x)$, $y_2 = e^{f(x)}$

§1. Είναι πάντοτε $y_2 = e^{f(x)} > 0$.

§2. α) "Αν $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_k]{x \rightarrow \infty} -\infty$ (ή και $x \rightarrow \infty$) $\leadsto e^{f(x)} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{x \rightarrow \infty} e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$.

"Ωστε: "Αν $y_1 \rightarrow -\infty \leadsto y_2 \rightarrow 0^+$. "Αλλά και,

β) "Αν $-\infty < f(x) < -1 \leadsto e^{-\infty} < e^{f(x)} < e^{-1}$ (διδόμ ή e^x είναι $\uparrow$) ή $\frac{1}{e^{+\infty}} < e^f < \frac{1}{e} \simeq 0.37$ ή $\frac{1}{+\infty} < e^f < \frac{1}{e}$ ή $0^+ < e^f < \frac{1}{e}$

"Ωστε: "Αν $-\infty < y_1 < -1 \leadsto 0 < y_2 < \frac{1}{e}$.

γ) "Αν $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \infty \\ (\text{ή } x \rightarrow x_k)}]{x \rightarrow \infty} (-1)^- \leadsto e^{f(x)} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \infty \\ (\text{ή } x \rightarrow x_k)}]{x \rightarrow \infty} e^{(-1)^-} = \left(\frac{1}{e}\right)^-.$ "Υπό μορφήν όρίου.

"Ωστε: "Αν $y_1 \rightarrow (-1)^- \leadsto y_2 \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^-.$

δ) "Αν $f(x_k) = -1 \leadsto e^{f(x_k)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

"Ωστε: "Αν $y_1(x_k) = -1 \leadsto y_2(x_k) = \frac{1}{e}$.

ε) "Αν $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \infty \\ (\text{ή } x \rightarrow x_k)}]{x \rightarrow \infty} (-1)^+ \leadsto e^{f(x)} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \infty \\ (\text{ή } x \rightarrow x_k)}]{x \rightarrow \infty} e^{(-1)^+} = \left(\frac{1}{e}\right)^+.$ "Υπό μορφήν όρίου.

"Ωστε: "Αν $y_1 \rightarrow (-1)^+ \leadsto y_2 \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^+.$ "Αλλά και,

$$\alpha) \text{ "}\forall -1 < f(x) < 0 \rightsquigarrow e^{-1} < e^{f(x)} < e^0 \text{ (δίατι } e^x \uparrow \text{)}$$

$$\frac{1}{e} < e^f < 1.$$

$$\text{"}\forall \varepsilon: \text{"}\forall -1 < y_1 < 0 \rightsquigarrow \frac{1}{e} < y_2 < 1.$$

$$\beta) \text{ "}\forall f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \infty \\ (\text{in } x \rightarrow x_k)}]{} 0^- \rightsquigarrow e^{f(x)} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \infty \\ (\text{in } x \rightarrow x_k)}]{} e^{0^-} = 1^-.$$

$$\text{"}\forall \varepsilon: \text{"}\forall y_1 \rightarrow 0^- \rightsquigarrow y_2 \rightarrow 1^-.$$

$$\eta) \text{ "}\forall f(x_k) = 0 \rightsquigarrow e^{f(x_k)} = e^0 = 1.$$

$$\text{"}\forall \varepsilon: \text{"}\forall y_{f(x_k)} = 0 \rightsquigarrow y_{f(x_k)} = 1.$$

$$\theta) \text{ "}\forall f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \infty \\ (\text{in } x \rightarrow x_k)}]{} 0^+ \rightsquigarrow e^{f(x)} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \infty \\ (\text{in } x \rightarrow x_k)}]{} e^{0^+} = 1^+.$$

$$\text{"}\forall \varepsilon: \text{"}\forall y_1 \rightarrow 0^+ \rightsquigarrow y_2 \rightarrow 1^+.$$

$$\iota) \text{ "}\forall 0 < f(x) < 1 \rightsquigarrow e^0 < e^{f(x)} < e^1 \text{ (δίατι } e^x \uparrow \text{)}$$

$$1 < e^f < e.$$

$$\text{"}\forall \varepsilon: \text{"}\forall 0 < y_1 < 1 \rightsquigarrow 1 < y_2 < e.$$

$$\iota\alpha) \text{ "}\forall f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \infty \\ (\text{in } x \rightarrow x_k)}]{} 1^- \rightsquigarrow e^{f(x)} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \infty \\ (\text{in } x \rightarrow x_k)}]{} e^{1^-} = e^-.$$

$$\text{"}\forall \varepsilon: \text{"}\forall y_1 \rightarrow 1^- \rightsquigarrow y_2 \rightarrow e^-.$$

$$\iota\beta) \text{ "}\forall f(x_k) = 1 \rightsquigarrow e^{f(x_k)} = e^1 = e.$$

Ήρτε: αν $y_1(x_k) = 1 \rightsquigarrow y_2(x_k) = e$.

18) Αν $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \infty \\ (\text{ή } x \rightarrow x_k)}]{\substack{x \rightarrow \infty \\ (\text{ή } x \rightarrow x_k)}} 1^+ \rightsquigarrow e^{\overset{f(x)}{1^+}} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow \infty \\ (\text{ή } x \rightarrow x_k)}]{\substack{x \rightarrow \infty \\ (\text{ή } x \rightarrow x_k)}} e^{1^+} = e^+$. Υπόμορφω όρου.

Ήρτε: αν $y_1 \rightarrow 1^+ \rightsquigarrow y_2 \rightarrow e^+$. Αλλά και,

18) Αν $1 < f(x) < +\infty \rightsquigarrow e^1 < e^{f(x)} < e^{+\infty}$ (διότι $e^x \uparrow$)

ή $e < e^f < +\infty$.

Ήρτε: αν $1 < y_1 < +\infty \rightsquigarrow e < y_2 < +\infty$. Η και υπόμορφω όρου

18) Αν $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_k]{\substack{x \rightarrow x_k}} +\infty$ (ή και $x \rightarrow \infty$) $\rightsquigarrow e^{\overset{f(x)}{+\infty}} \xrightarrow[x \rightarrow x_k]{\substack{x \rightarrow x_k}} e^{+\infty} =$

$= +\infty$.

Ήρτε: αν $y_1 \rightarrow +\infty \rightsquigarrow y_2 \rightarrow +\infty$.

Σημείωση: Είναι $y_1 < y_2 \forall x \in \mathbb{R}_+$. Βλέπε σχετικά και ημετέρα mini έργασία: «Από τη μέγιστη της $y = (1+\alpha)^x - (1+\alpha x)$ στην ανισότητα Βερνούλλι». Εργασίας Γ' - 1990 - τόμος 7, τεύχος 26, Ελληνική Μαθηματική Έταιρεία (σελ. 120).

13) Έστω ότι η $y_1 = f(x)$ έχει ωλάγια άσύμωτω.

το τὴν $y = kx + \beta$ (ὥστε $f' \xrightarrow{x \rightarrow \infty} k \neq \infty$) μὲ $R \ni k =$
 $= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ καὶ $\beta = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$. τότε ἔχομε γὰρ
 τὴν y_2 : $k' = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{f(x)}}{x}$. Καί:

a) Ἄν $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$, τότε $k' = \frac{e^{+\infty}}{\infty} = \frac{+\infty}{\infty} = \text{ἀόριστος}$
 μορφή. καὶ $k' = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(e^f)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^f \cdot f'}{1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f' \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (e^f) =$
 $= k(+\infty) = \infty$. Ἀρα δὲν ὑπάρχει ἀσύμπτωτος τῆς y_2 .

b) Ἄν $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty$, τότε $k' = \frac{e^{-\infty}}{\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} \cdot \frac{1}{\infty} =$
 $= \frac{1}{+\infty} \cdot \frac{1}{\infty} = 0^+ \cdot 0 = 0$. ὥστε $\beta' = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (e^f + k'x) =$
 $= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (e^f) = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$. Ἀρα ἔχομε τὴν ἀ-
 σύμπτωτο $y = k'x + \beta' = (0x)^+ + 0^+ = 0^+$. δηλ. τὸν ἄξονα x .

§ 3. Εἶναι: $y_2' = (e^f)' = e^f \cdot f'$ καὶ $y_2'' = e^f (f'^2 + f'')$.

Ἦτοι:

$$\boxed{y_2' = e^f \cdot f'} \quad (1)$$

$$\boxed{y_2'' = e^f (f'^2 + f'')} \quad (2)$$

Ⓘ. Ἄν $f'(x) > 0$.

α) $f'' > 0 \leadsto y_1 \uparrow$ και κοίτη. Έως ότου, $y_2' = e^f \cdot f' > 0$ και $y_2'' = e^f (f'^2 + f'') > 0 \leadsto y_2 \uparrow$ και κοίτη.

Παράδειγμα: α') $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{e^x}$. β') $y_1 = -\frac{1}{x}$, $y_2 = e^{-\frac{1}{x}} \mid x < 0$.

β) $f'' < 0 \leadsto y_1 \uparrow$ και κυρτή. Έως ότου, $y_2' = e^f \cdot f' > 0$ και $y_2'' = e^f (f'^2 + f'')$.

Αν $[f'(x_k)]^2 + f''(x_k) = 0 \leadsto y_2'' = 0$ και αν $y_2'''(x_k) \neq 0 \leadsto y_2 \uparrow$ και έχει σημείο καμπής στο $[x_k, e^{f(x_k)}]$.

Σημείωση: Είναι $y_2''' = e^f (f'^3 + 3f'f'' + f''') = e^f [f'[(f'^2 + f'') + 2f''] + f''']$. Άρα $y_2'''(x_k) = e^{f(x_k)} [f'(x_k) [0 + 2f''(x_k)] + f'''(x_k)] = e^{f(x_k)} [2f'(x_k)f''(x_k) + f'''(x_k)] \neq 0$.

Παράδειγμα: α) $y_1 = -\frac{1}{x-1}$, $y_2 = e^{-\frac{1}{x-1}} \mid 1 < x$.
β') $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = e^{\sqrt{x}}$.

'Αν $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $[f'(x)]^2 + f''(x) = 0$, τότε
 $y_2'' = 0$ ή $\frac{d}{dx} y_2' = 0 \leadsto y_2' = c_1 > 0 \leadsto \frac{d}{dx} y_2 =$
 $= c_1 \leadsto dy_2 = c_1 dx \leadsto y_2 = c_1 \int dx + c_2 = c_1 x + c_2,$
 δηλ. εὐθεία. και' ἐν τῇς $y_2 = e^{y_1} \leadsto c_1 x + c_2 =$
 $= e^{y_1} > 0 \leadsto y_1 = \ln(c_1 x + c_2).$

γ) $f''(x_k) = 0$ [μέ $f'''(x_k) \neq 0$] $\leadsto y_1 \uparrow$ και'
 ἔχει σ.μ. μέ ἀλλάζιαν καίση στο σημείο $[x_k, f(x_k)]$.
 Ἐπίσης, $y_2' > 0$ και' $y_2'' = e^{f'}(f' + f'') = e^{f'} \cdot f' > 0 \leadsto$
 $y_2 \uparrow$ και' κοίτη.

Παράδειγμα: α) $y_1 = \varepsilon \varphi x$, $y_2 = e^{\varepsilon \varphi x}$. β) $y_1 =$
 $= s \eta x$, $y_2 = e^{s \eta x}$. γ) $y_1 = \varepsilon \varphi^2 x$, $y_2 = e^{\varepsilon \varphi^2 x}$.

Σημείωση: 'Αν συμβεί γά είναι $y_2''(x_k) = 0$ και'
 $y_2''(x) > 0 \quad \forall x \in (\omega \rho \iota \sigma \chi \acute{\eta} \ x_k, \omega \rho \iota \sigma \chi \acute{\eta} \ x = x_k)$ τότε ἔχομε
 κοίτη στήν ωρίσχη τοῦ x_k και', ἂν $y_2''(x) < 0$,
 ἔχομε κυρτότητα.

ΨΥΣΕ:

α) y_1, y_2 συνανζώνουσες και ποιές.

Παράδειγμα: $y_1 = x^3, y_2 = e^{x^3} \mid 0 < x$.

β) y_1, y_2 συνανζώνουσες και y_1 κυρτή, y_2 έχει σημείο καμπής.

Παράδειγμα: $y_1 = x^3, y_2 = e^{x^3} \mid x < 0$.

Σημείωση: Αν $y_1 = \ln x \leadsto y_2 = e^{\ln x} = x$.

γ) y_1, y_2 συνανζώνουσες και y_1 έχει σ.κ., y_2 ποιήμ.

Παράδειγμα: $y_1 = \pi x, y_2 = e^{\pi x} \mid x \in (\omega \epsilon \rho \iota \sigma \chi \eta \tau \omega \upsilon \chi_\kappa = 0)$.

Ⓐ Αν $f'(x) < 0$.

α) $f'' > 0 \leadsto y_1 \downarrow$ και ποιήμ. Έσθις, $y_2' = e^f f' < 0$
και $y_2'' = e^f (f'^2 + f'') > 0 \leadsto y_2 \downarrow$ και ποιήμ.

Παράδειγμα: α') $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{e^{-x}}$. β') $y_1 = \frac{1}{x^2},$

$y_2 = e^{\frac{1}{x^2}} \mid 0 < x$.

β) $f'' < 0 \leadsto y_1 \downarrow$ και ωρεή. Έπίσης, $y_2' = e^f f' < 0$ και $y_2'' = e^f (f'^2 + f'')$.

"Αν $[f'(x_k)]^2 + f''(x_k) = 0 \leadsto y_2'' = 0$ και αν $y_2'''(x_k) \neq 0 \leadsto y_2 \downarrow$ και έχει σημ. υ. στο $[x_k, e^{f(x_k)}]$.

Παράδειγμα: $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = e^{1/x}$ | $x < 0$.

"Αν $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $[f'(x)]^2 + f''(x) = 0$, τότε $y_2'' = 0$

"η $\frac{d}{dx} y_2' = 0 \leadsto y_2' = C_1 < 0 \leadsto \frac{d}{dx} y_2 = C_1 \leadsto dy_2 = C_1 dx$

$\leadsto y_2 = C_1 \int dx + C_2 = C_1 x + C_2$, δηλ. ευθεία. Και έυ

τείν $y_2 = e^{y_1} \leadsto C_1 x + C_2 = e^{y_1} > 0 \leadsto y_1 = \ln(C_1 x + C_2)$.

γ) $f''(x_k) = 0$ [μέ' $f'''(x_k) \neq 0$] $\leadsto y_1 \downarrow$ και έχει σ. υ. μέ' ωράγια κλίση στο σημείο $[x_k, f(x_k)]$. Επίσης, $y_2' < 0$ και $y_2'' = \dots > 0 \leadsto y_2 \downarrow$ και κοίτη.

Παράδειγμα: $y_1 = -\exp x$, $y_2 = e^{-\exp x}$

"Όστε:

α) y_1, y_2 συμφθίνουσες και κοίτες.

β) y_1, y_2 συμφθίνουσες και y_1 υπερή, y_2 έχει σ.υ.

Σημείωση: Αν $y_1 = \ln(-x) \rightsquigarrow y_2 = e^{\ln(-x)} = -x$.

γ) y_1, y_2 συμφθίνουσες και y_1 έχει σ.υ., y_2 ποίγη.

Ⓐ) Αν $f'(x_k) = 0$

α) $f''(x) > 0 \mid x \in (\omega \epsilon \rho \iota \sigma \chi \eta \ x_k) \rightsquigarrow y_1$ έχει min στο σημείο $[x_k, f(x_k)]$. Έξωίσης, $y_2' = e^{f(x_k)} \cdot f'(x_k) = 0$ και $y_2'' = e^{f(x_k)} [[f'(x_k)]^2 + f''(x)] = e^{f(x_k)} [0 + f''(x)] > 0$. άρα y_2 έχει min στο σημείο $[x_k, e^{f(x_k)}]$.

Παράδειγμα: $y_1 = x^2, y_2 = e^{x^2}$.

β) $f''(x) < 0 \mid x \in (\omega \epsilon \rho \iota \sigma \chi \eta \ x_k) \rightsquigarrow y_1$ έχει max στο σημείο $[x_k, f(x_k)]$. Έξωίσης, $y_2' = e^{f(x_k)} \cdot f'(x_k) = 0$ και $y_2'' = e^{f(x_k)} [[f'(x_k)]^2 + f''(x)] = e^{f(x_k)} [0 + f''(x)] < 0$. άρα y_2 έχει max στο σημείο $[x_k, e^{f(x_k)}]$.

γ) $f''(x_k) = 0$ [με $f'''(x_k) \neq 0$], τότε y_1 έχει σ.υ.

στό $[x_k, f(x_k)]$ μέ τιμή μηδέν. Έσως, $y_2' = e^{f(x_k)} \cdot f'(x_k) = 0$ και $y_2'' = e^{f(x_k)} \cdot [f'(x_k)^2 + f''(x_k)] = 0$ και αν $f'''(x_k) \neq 0$, τότε y_2 έχει σ.μ. στο $[x_k, e^{f(x_k)}]$ μέ τιμή μηδέν.

Σημείωση: Είναι $y_2''' = (e^f f'^2 + e^f f'')' = e^f f'^3 + e^f 2f'f'' + e^f f'f'' + e^f f''' = e^f f''' \neq 0$.

Παράδειγμα: $y_1 = x^3$, $y_2 = e^{x^3} \mid x \in (\omega \epsilon \rho \iota \sigma \chi \eta \text{ το } x_k = 0)$.

IV α) Αν $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_k} +\infty \rightsquigarrow y_2' = e^{f(x)} \cdot f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_k} +\infty$
 $\rightarrow e^{f(x_k)}(+\infty) = +\infty$.

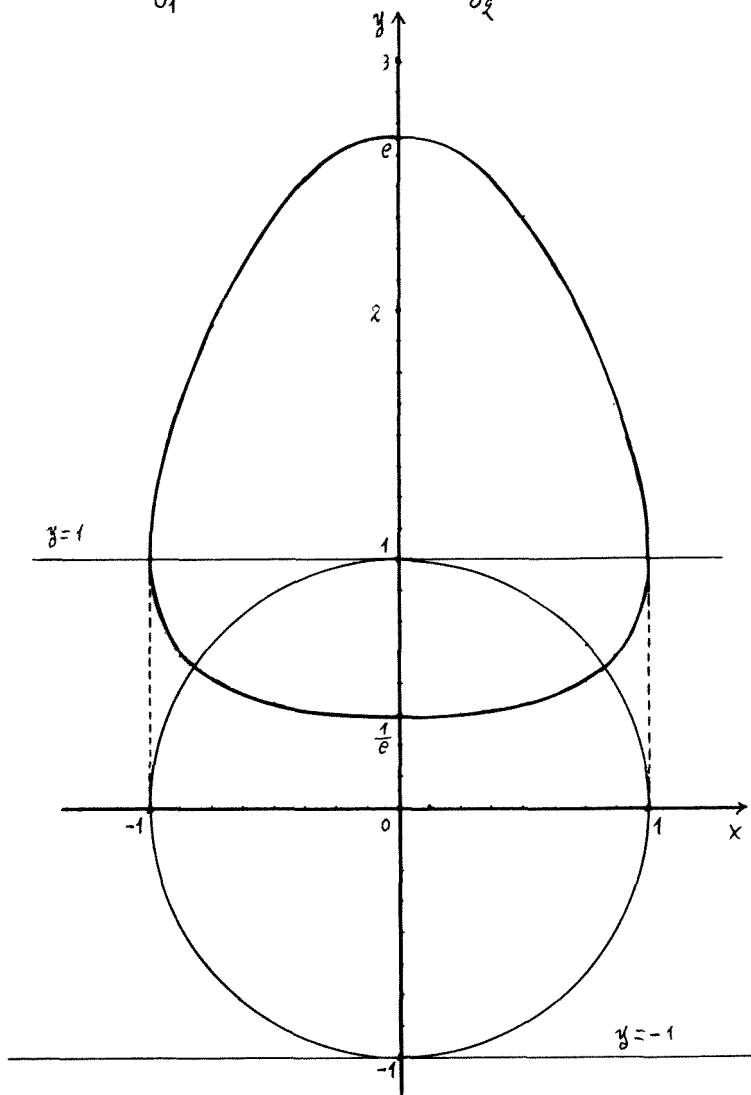
Παράδειγμα: α) $y_1 = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, $y_2 = e^{x^{1/3}}$. β) $y_1 = \sqrt{x}$, $y_2 = e^{\sqrt{x}}$. γ) $y_1 = -\sqrt{-x}$, $y_2 = e^{y_1}$.

β) Αν $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_k} -\infty \rightsquigarrow y_2' = e^{f(x)} \cdot f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_k} e^{f(x_k)} \cdot (-\infty) = -\infty$.

Παράδειγμα: α) $y_1 = -\sqrt[3]{x} = -x^{1/3}$, $y_2 = e^{-x^{1/3}}$. β) $y_1 = -\sqrt{x}$, $y_2 = e^{-\sqrt{x}}$. γ) $y_1 = \sqrt{-x}$, $y_2 = e^{y_1}$.

Νά γίνουν οί γραφικές παραστάσεις τών:

$$x^2 + y_1^2 = 1 \quad \text{και} \quad y_2 = e^{y_1}$$



Σχ. 27.

ΤΡΙΤΟ ΠΑΚΕΤΟ

ΣΥΓΓΕΝΕΙΑ ΤΩΝ $y_1 = f(x)$, $y_2 = \ln f(x) \mid f(x) > 0$.

§ 1. Είναι ως γνωστόν $-\infty < \ln f < +\infty \mid f > 0$.

§ 2. α) "Αν $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_k} 0^+$ ("η και $x \rightarrow \infty$) $\leadsto \ln f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{} -\infty$.

"Ωστε: αν $y_1 \rightarrow 0^+ \leadsto y_2 \rightarrow -\infty$. Άλλα και,

β) "Αν $0 < f(x) < 1 \leadsto -\infty < \ln f < 0$ (διότι η $y = \ln x$ είναι $\uparrow$).

"Ωστε: αν $0 < y_1 < 1 \leadsto -\infty < y_2 < 0$.

γ) "Αν $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{} 1^- \leadsto \ln f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{} 0^-$. Υπό μορφών όριου.

"Ωστε: αν $y_1 \rightarrow 1^- \leadsto y_2 \rightarrow 0^-$

δ) "Αν $f(x_k) = 1 \leadsto \ln f(x_k) = 0$

"Ωστε: αν $y_1(x_k) = 1 \leadsto y_2(x_k) = 0$.

ε) "Αν $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{} 1^+ \leadsto \ln f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{} 0^+$. Υπό μορφών όριου.

"Ωστε: αν $y_1 \rightarrow 1^+ \leadsto y_2 \rightarrow 0^+$. Άλλα και,

στ) "Αν $1 < f(x) < e \simeq 2,7 \leadsto 0 < \ln f(x) < 1$.

"Ωστε: αν $1 < y_1 < e \leadsto 0 < y_2 < 1$.

ζ) "Αν $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{} e^- \leadsto \ln f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{} 1^-$. Υπό μορφών όριου.

"Ωστε: αν $y_1 \rightarrow e^- \leadsto y_2 \rightarrow 1^-$.

η) "Αν $f(x_k) = e \leadsto \ln f(x_k) = 1$.

"Ωστε: αν $y_1(x_k) = e \leadsto y_2(x_k) = 1$.

θ) "Αν $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{\quad} e^+ \leadsto \ln f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{\quad} 1^+$. Ψωδ μορφών όρίων.

"Ωστε: αν $y_1 \rightarrow e^+ \leadsto y_2 \rightarrow 1^+$. Άλλή και,

ι) "Αν $e < f(x) < +\infty \leadsto 1 < \ln f(x) < +\infty$.

"Ωστε: αν $e < y_1 < +\infty \leadsto 1 < y_2 < +\infty$. Η και ψωδ μορφών όρίων,

ια) "Αν $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{\quad} +\infty \leadsto \ln f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{\quad} +\infty$.

"Ωστε: αν $y_1 \rightarrow +\infty \leadsto y_2 \rightarrow +\infty$.

Σημείωση: Είναι $y_1 > y_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$. Βλέπε σχετική και ημετέρα mini έργασία: «Ψωδ τή μερέτη τής $y = (1+\alpha)^x - (1+\alpha x)$ στην ανισότητα Bernoulli». Εμπειδης Γ' - 1990 - τόμος 7, ζεύχος 26, 'Ελληνική Μαθηματική Έταιρεία (σελ. 120).

ιβ) "Εστω ότι ή $y_1 = f(x)$ έχει ψωδ για άσύμωτω το τών $y = kx + j$ (όωδτε $f' \xrightarrow{x \rightarrow \infty} k \neq \infty$) με $R \Delta K =$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ και } j = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) + kx]. \text{ τότε έχουμε}$$

$$\text{για την } y_2: k' = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln f(x)}{x}. \text{ και αν } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty,$$

$$\text{τότε } k' = \frac{\ln(+\infty)}{\infty} = \frac{+\infty}{\infty} = \text{αόριστος μορφή, οπότε } k' =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{[\ln f(x)]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)} = \frac{k}{+\infty} = k \cdot \frac{1}{+\infty} = k \cdot 0^+ = 0. \text{ Οπότε και}$$

$$j' = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\ln f(x) + k'x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\ln f(x)] = \ln(+\infty) = +\infty.$$

Άρα δεν υπάρχει ασύμπτωτος.

$$\S 3. \text{ Είναι: } y_2' = (\ln f)' = \frac{f'}{f} \text{ και } y_2'' = \frac{ff'' - f'^2}{f^2}. \text{ Άρα:}$$

$$\boxed{y_2' = \frac{f'}{f}} \quad (1)$$

$$\boxed{y_2'' = \frac{ff'' - f'^2}{f^2}} \quad (2)$$

①. Αν $f'(x) > 0 \rightsquigarrow y_1, y_2 \uparrow$.

α) $f'' > 0 \rightsquigarrow y_1$ κοίτη και, y_2 κοίτη αν $ff'' - f'^2 > 0$,
 ωπρην αν $ff'' - f'^2 < 0$, έχει σ.κ. αν $ff'' - f'^2 = 0$ μέ $y_2''(x) \neq 0$.

β) $f'' < 0 \rightsquigarrow y_1$ ωπρην και y_2 ωπρην διότι $ff'' - f'^2 < 0$.

γ) $f''(x_k) = 0 \leadsto y_1$ έχει σ.υ. στο $[x_k, f(x_k)]$
 αν $f'''(x_k) \neq 0$ και y_2 υπέρ ή διότι $ff'' - f'^2 = -f'^2 < 0$.

II. $\forall f'(x) < 0 \leadsto y_1, y_2 \downarrow$.

α) $f'' > 0 \leadsto y_1$ κοίτη και y_2 κοίτη ή υπέρ ή έχα σ.υ.

β) $f'' < 0 \leadsto y_1, y_2$ κυρτές.

γ) $f''(x_k) = 0 \leadsto y_1$ έχει σ.υ. ($f'''(x_k) \neq 0$) και y_2 υπέρ.

III. $\forall f'(x_k) = 0 \leadsto y_1, y_2$ έχουν άμφοτερο ή σ.υ. στο $[x_k, f(x_k)]$ ή y_1 και στο $[x_k, \ln f(x_k)]$ ή y_2 . Αναγκασιά:

α) $f''(x_k) > 0 \leadsto y_1 \min [\forall f'''(x_k) \neq 0]$ και $y_2'(x_k) = 0$,
 $y_2''(x_k) = \frac{f''(x_k)}{f(x_k)} > 0 \leadsto y_2(x_k) \min$.

β) $f''(x_k) < 0 \leadsto y_1 \max [\forall f'''(x_k) \neq 0]$ και $y_2'(x_k) = 0$,
 $y_2''(x_k) = \frac{f''(x_k)}{f(x_k)} < 0 \leadsto y_2(x_k) \max$.

γ) $f''(x_k) = 0 \leadsto y_1$ έχει σ.υ. [$\forall f'''(x_k) \neq 0$] και y_2
 έχει σ.υ. [$\forall y_2''(x_k) \neq 0$, περιμένει να γίνει άνω ή κάτω στο $f'''(x_k) \neq 0$]

Συνοψικά

	y_1'	y_1''	y_1	y_2'	y_2''	y_2
I	+	+	↑ κοίτη	+	;	↑ κοίτη ή κυρτή ή σ.υ.
		-	↑ κυρτή		-	↑ κυρτή
		0	↑ σ.υ.		-	↑ κυρτή
II	-	+	↓ κοίτη	-	;	↓ κοίτη ή κυρτή ή σ.υ.
		-	↓ κυρτή		-	↓ κυρτή
		0	↓ σ.υ.		-	↓ κυρτή
III	0	+	min	0	-	min
		-	max		-	max
		0	σ.υ.		0	σ.υ.

IV. α) $\lim_{x \rightarrow x_k} f'(x) \rightarrow +\infty \leadsto y_2' = \frac{f'(x)}{f(x)} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{+\infty}{f(x_k)} = +\infty.$

β) $\lim_{x \rightarrow x_k} f'(x) \rightarrow -\infty \leadsto y_2' = \frac{f'(x)}{f(x)} \rightarrow \frac{-\infty}{f(x_k)} = -\infty.$

§4. Καί τώρα ὅς μὲν ἔχουμε ὅτι οἰκονομικά τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων. Εἶναι: $y_2'' = \frac{f f'' - f'^2}{f^2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 ἂν $f f'' - f'^2 = 0$.

Καθότι $f'(x) = g(f)$, ὥστε $\frac{d}{dx} [f'(x)] = \frac{d}{dx} [g(f)]$
 $\leadsto f''(x) = \frac{df}{dx} \cdot \frac{d[g(f)]}{df} = f' \cdot \frac{d[g(f)]}{df} = g(f) \cdot g'(f)$.

Καί ἡ ἐξίσωση γίνεται: $f g g' - g^2 = 0$ ἢ $g(f g' - g) = 0$.

ἢ ἢ $g = 0$, δηλ. $f' = 0 \leadsto f(x) = c > 0$ καί $f g' - g = 0$

$\leadsto f g' = g \leadsto f \frac{dg}{df} = g \leadsto \frac{dg}{g} = \frac{df}{f} \leadsto \int \frac{dg}{g} =$

$= \int \frac{df}{f} + C_1 \leadsto \ln |g| = \ln f + \ln |C_1| \leadsto \ln |g| = \ln |C_1 f|$

$\leadsto g = C_2 f \leadsto f' = C_2 f \leadsto \frac{df}{dx} = C_2 f \leadsto \frac{df}{f} = C_2 dx$

$\leadsto \int \frac{df}{f} = C_2 \int dx + C_3 \leadsto \ln f = C_2 x + C_3 \leadsto f =$

$= e^{C_2 x + C_3} = e^{C_3} e^{C_2 x} \leadsto f(x) = \alpha e^{\beta x}$ με $\alpha > 0$.

ἢ ὥστε, ἂν $y_1 = c \leadsto y_2 = \ln y_1 = \ln c \leadsto y_2'' = 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}$. Καί, ἂν $y_1 = \alpha e^{\beta x} \leadsto y_2 = \ln y_1 = \ln(\alpha e^{\beta x}) =$
 $= \ln \alpha + \beta x = \kappa x + \lambda$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- 1)** $y_1 = -\frac{1}{x} \mid x < 0$, $y_2 = \ln y_1$ ($I\alpha_1$). **2)** $y_1 = x^2 \mid 0 < x$,
 $y_2 = \ln y_1$ ($I\alpha_2$). **3)** $y_1 = \varepsilon\varphi x \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y_2 = \ln y_1$ ($I\alpha_3$).
4) $y_1 = \frac{1}{x} \mid 0 < x$, $y_2 = \ln y_1$ ($II\alpha_1$). **5)** $y_1 = x^2 \mid x < 0$,
 $y_2 = \ln y_1$ ($II\alpha_2$). **6)** $y_1 = -\varepsilon\varphi x \mid -\frac{\pi}{2} < x < 0$, $y_2 = \ln y_1$ ($II\alpha_3$).
7) $y_1 = \ln x \mid 1 < x$, $y_2 = \ln(\ln x)$ ($I\beta$). **8)** $y_1 = \ln(-x) \mid x < -1$,
 $y_2 = \ln[\ln(-x)]$ ($II\beta$). **9)** $y_1 = 1 + \eta\varphi x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y_2 =$
 $= \ln(1 + \eta\varphi x)$ ($I\gamma$). **10)** $y_1 = 1 - \eta\varphi x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y_2 =$
 $= \ln(1 - \eta\varphi x)$ ($II\gamma$). **11)** $y_1 = x^3 + 1$, $y_2 = \ln(x^3 + 1)$ ($III\alpha$).
12) $y_1 = -x^2 + 1 \mid -1 < x < 1$, $y_2 = \ln(-x^2 + 1)$ ($III\beta$). **13)** $y_1 =$
 $= x^3 + 1 \mid -1 < x$, $y_2 = \ln(x^3 + 1)$ ($III\gamma$).

- Έως τότε: **1)** $y_1 = x^3 + 1$, $y_2 = \ln y_1$ ($I\alpha_3$ και $II\alpha_3$).
2) $y_1 = x^3 + 1 \mid -1 < x$, $y_2 = \ln y_1$ ($I\alpha_3$). **3)** $y_1 = -\ln x \mid$
 $\mid 0 < x < 1$, $y_2 = \ln y_1$ ($II\alpha_3$). **4)** $y_1 = -\ln(-x) \mid -1 < x < 0$,
 $y_2 = \ln y_1$ ($I\alpha_3$).

ΤΕΤΑΡΤΟ ΠΑΚΕΤΟ

ΣΥΓΓΕΝΕΙΑ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ $y_1 = f(x)$, $y_2 = \frac{1}{f(x)}$.

§ 1. Είναι κατ'αρχήν $f(x) \neq 0$ · και έτι εώς
 $f(x) = \frac{1}{f(x)} \leadsto f(x_0) = \pm 1$. Αναγνωτεύα:

§ 2. α) Αν $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_k]{(\dot{\text{η}} \ x \rightarrow \infty)} -\infty \leadsto \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \rightarrow x_k]{(\dot{\text{η}} \ x \rightarrow \infty)} \frac{1}{-\infty} = 0^-$.

Υπό μορφήν όρίον.

Ήθετε: αν $y_1 \rightarrow -\infty \leadsto y_2 \rightarrow 0^-$. Άλλα και,

β) Αν $-\infty < f(x) < -1 \leadsto \frac{1}{-\infty} > \frac{1}{f} > -1$ ή $0 > \frac{1}{f} > -1$
ή $-1 < \frac{1}{f} < 0$ (όχι αντιστοιχώς).

Ήθετε: αν $-\infty < y_1 < -1 \leadsto -1 < y_2 < 0$.

γ) Αν $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_k]{(\dot{\text{η}} \ x \rightarrow \infty)} (-1)^- \leadsto \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \rightarrow x_k]{(\dot{\text{η}} \ x \rightarrow \infty)} \frac{1}{(-1)^-} = (-1)^+$.

Υπό μορφήν όρίον.

Ήθετε: αν $y_1 \rightarrow (-1)^- \leadsto y_2 \rightarrow (-1)^+$.

δ) Αν $f(x_k) = -1 \leadsto \frac{1}{f(x_k)} = \frac{1}{-1} = -1$.

Ήθετε: αν $y_1(x_k) = -1 \leadsto y_2(x_k) = -1$.

ε) Αν $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_k]{(\dot{\text{η}} \ x \rightarrow \infty)} (-1)^+ \leadsto \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \rightarrow x_k]{(\dot{\text{η}} \ x \rightarrow \infty)} \frac{1}{(-1)^+} = (-1)^-$.

Υπό μορφήν όριου.

"Ώστε: αν $y_1 \rightarrow (-1)^+ \leadsto y_2 \rightarrow (-1)^-$. Αλλά και,

$$\sigma\tau) \text{ Αν } -1 < f(x) < 0 \leadsto \frac{1}{-1} > \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{0^-} = -\infty \text{ ή } -1 > \frac{1}{f(x)} > -\infty \text{ ή } -\infty < \frac{1}{f(x)} < -1.$$

"Ώστε: αν $-1 < y_1 < 0 \leadsto -\infty < y_2 < -1$.

$$3) \text{ Αν } f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{\quad} 0^- \leadsto \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{\quad} \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Υπό μορφήν όριου.

"Ώστε: αν $y_1 \rightarrow 0^- \leadsto y_2 \rightarrow -\infty$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: "Ώστε, αν $y_1 = f(x) < 0 \leadsto y_2 = \frac{1}{f(x)} < 0$.

$$\eta) \text{ Αν } f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{\quad} 0^+ \leadsto \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{\quad} \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Υπό μορφήν όριου.

"Ώστε: αν $y_1 \rightarrow 0^+ \leadsto y_2 \rightarrow +\infty$. Αλλά και,

$$\theta) \text{ Αν } 0 < f(x) < 1 \leadsto \frac{1}{0^+} > \frac{1}{f(x)} > 1 \text{ ή } +\infty > \frac{1}{f(x)} > 1 \text{ ή } 1 < \frac{1}{f(x)} < +\infty.$$

"Ώστε: αν $0 < y_1 < 1 \leadsto 1 < y_2 < +\infty$.

$$ι) \text{ Αν } f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{\quad} 1^- \leadsto \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{\quad} \frac{1}{1^-} = 1^+.$$

Υπό μορφών όριου.

"Ώστε: αν $y_1 \rightarrow 1^- \rightsquigarrow y_2 \rightarrow 1^+$.

1α) "Αν $f(x_k) = 1 \rightsquigarrow \frac{1}{f(x_k)} = \frac{1}{1} = 1$.

"Ώστε: αν $y_1(x_k) = 1 \rightsquigarrow y_2(x_k) = 1$.

1β) "Αν $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{} 1^+ \rightsquigarrow \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{} \frac{1}{1^+} = 1^-$.

Υπό μορφών όριου.

"Ώστε: αν $y_1 \rightarrow 1^+ \rightsquigarrow y_2 \rightarrow 1^-$. Άλλα και,

1γ) "Αν $1 < f(x) < +\infty \rightsquigarrow 1 > \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{+\infty} = 0^+$ ή $0 < \frac{1}{f(x)} < 1$.

"Ώστε: αν $1 < y_1 < +\infty \rightsquigarrow 0 < y_2 < 1$. Η, και
υπό μορφών όριου,

1δ) "Αν $f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{} +\infty \rightsquigarrow \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_k \\ (\text{ή } x \rightarrow \infty)}]{} \frac{1}{+\infty} = 0^+$.

"Ώστε: αν $y_1 \rightarrow +\infty \rightsquigarrow y_2 \rightarrow 0^+$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: "Ώστε, αν $y_1 = f(x) > 0 \rightsquigarrow y_2 = \frac{1}{f(x)} > 0$.

1ε) Έν τών α, β, ε, ζ, η, ι, ιβ συμφερώνομε ότι ο
άξων τών x είναι ανήμθωτος εύδεξ, καθώς καί οι $y = \pm 1$.

"Εστω τώρα ότι η $y_1 = f(x)$ έχει ολικά ασύμμετρο
 τών $y = kx + j$ με $R \ni k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $j = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) + kx]$.

$$\text{Τότε έχουμε για τών } y_2: k' = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1/f}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x \cdot f} = \\ = \frac{1}{(\pm\infty)(\pm\infty)} = 0^+. \text{ Και } j' = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{1}{f} + k'x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f} = 0.$$

Ναί, ο άξων των x είναι ασύμμετρος ενδείξ.

$$\S 3. \text{ Είναι: } y_2' = \left(\frac{1}{f} \right)' = -\frac{f'}{f^2} \cdot \text{ και } y_2'' = \\ = -\frac{f''f^2 - 2ff'^2}{f^4} = \frac{2f'^2 - ff''}{f^3} \cdot \text{ Ητοι:}$$

$$\boxed{y_2' = -\frac{f'}{f^2}} \quad (1)$$

$$\boxed{y_2'' = \frac{2f'^2 - ff''}{f^3}} \quad (2)$$

Ⓐ. Είναι $f(x) > 0 \mid x \in (\alpha, \theta)$.

Ⓘ_Α. Αν $f'(x) > 0 \leadsto y_1 \uparrow$ και $y_2' < 0 \leadsto y_2 \downarrow$.

α) $f'' > 0 \leadsto y_1$ κοίτη και, y_2 κοίτη αν $2f'^2 - ff'' > 0$,
 κυρτή αν $2f'^2 - ff'' < 0$, έχει σημείο καμπής αν $2[f'(x_k)]^2 -$
 $- f(x_k) \cdot f''(x_k) = 0$ με $y_2'''(x_k) \neq 0$ (ολικά για υψίσση).

Παράδειγμα: 1) $y_1 = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \mid x < 0$, $y_2 = \frac{1}{y_1}$. 2)

$$y_1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -x^{-\frac{1}{3}} \mid x < 0, y_2 = \frac{1}{y_1} \cdot 3) y_1 = -\frac{1}{x} = -x^{-1} \mid x < 0,$$

$$y_2 = \frac{1}{y_1} \cdot 4) y_1 = x^2 + 1 \mid 0 < x, y_2 = \frac{1}{y_1}.$$

$$\theta) f'' < 0 \leadsto y_1 \text{ κυρτή και } y_2 \text{ κοίλη, διότι } 2f'^2 - ff'' > 0.$$

Παράδειγμα: 1) $y_1 = \sqrt{x} = x^{1/2}, y_2 = \frac{1}{y_1} \cdot 2) y_1 = \ln x \mid 1 < x,$

$$y_2 = \frac{1}{y_1} \cdot 3) y_1 = \sin x \mid -\frac{\pi}{2} < x < 0, y_2 = \frac{1}{y_1}.$$

$$\delta) f''(x_k) = 0 \leadsto y_1 \text{ έχει σ.μ. στο } [x_k, f(x_k)] \text{ αν } f'''(x_k) \neq 0 \text{ (ωφέλιμα μίση) και } y_2 \text{ κοίλη στην περιοχή του } x_k, \text{ διότι } 2f'^2 - ff'' = 2f'^2 > 0.$$

Παράδειγμα: $y_1 = 2 + \pi x, y_2 = \frac{1}{y_1} \mid$ περιοχή μηδέν.

(II) Αν $f'(x) < 0 \leadsto y_1 \downarrow$ και $y_2' > 0 \leadsto y_2 \uparrow$.

α) $f'' > 0 \leadsto y_1$ κοίλη και y_2 κοίλη ή κυρτή ή έχει σ.μ. (ωφέλιμα μίση).

Παράδειγμα: 1) $y_1 = \frac{1}{x^2} \mid 0 < x, y_2 = \frac{1}{y_1} \cdot 2) y_1 = x^{-1/3} \mid$

$$0 < x, y_2 = \frac{1}{y_1} \cdot 3) y_1 = \frac{1}{x} \mid 0 < x, y_2 = \frac{1}{y_1} \cdot 4) y_1 = x^2 + 1 \mid$$

$$x < 0, y_2 = \frac{1}{y_1}.$$

$$\theta) f'' < 0 \leadsto y_1 \text{ κυρτή, } y_2 \text{ κοίλη.}$$

Παράδειγμα: 1) $y_1 = -x^2 + 1 \mid 0 < x, y_2 = \frac{1}{y_1} \cdot 2)$

$$y_1 = \sin x \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}, y_2 = \frac{1}{y_1}.$$

$$\gamma) f''(x_k) = 0 \leadsto y_1 \text{ 'έχει σ.υ. αν } f'''(x_k) \neq 0$$

(ωρίσθαι), και y_2 κρίση στην περιοχή του x_k .

Παράδειγμα: $y_1 = 2 - \varepsilon\varphi x$, $y_2 = \frac{1}{y_1}$.

III. Αν $f'(x_k) = 0 \leadsto y_1, y_2$ έχουν άμρότατο ή σ.υ.

στο $[x_k, f(x_k)]$ ή y_1 και στο $[x_k, \frac{1}{f(x_k)}]$ ή y_2 .

Αναγκυαία:

α) $f''(x_k) > 0 \leadsto y_1 \min [\text{αν } f'''(x_k) \neq 0]$, και

$y_2'(x_k) = 0$, $y_2''(x_k) = \frac{0 - f f''}{f^3} = -\frac{f''}{f^2} < 0 \leadsto y_2(x_k) \max$.

Παράδειγμα: 1) $y_1 = x^2 + 1$ | στην περιοχή του μηδέν,

$y_2 = \frac{1}{y_1}$. 2) $y_1 = \sin x$ | στην περιοχή του μηδέν, $y_2 = \frac{1}{y_1}$.

β) $f''(x_k) < 0 \leadsto y_1 \max [\text{αν } f'''(x_k) \neq 0]$, και

$y_2'(x_k) = 0$, $y_2''(x_k) = -\frac{f''}{f^2} > 0 \leadsto y_2(x_k) \min$.

Παράδειγμα: $y_1 = -x^2 + 1$ | στην δέρ. του μηδέν, $y_2 = \frac{1}{y_1}$.

γ) $f''(x_k) = 0 \leadsto y_1$ έχει σ.υ. αν $f'''(x_k) \neq 0$

(ορίσθαι κρίση), και y_2 έχει σ.υ. αν $y_2'''(x_k) \neq 0$ που τελικά καθίσταται άωό τό $f'''(x_k) \neq 0$ (ορίσθαι κρίση).

Παράδειγμα: $y_1 = x^3 + 1$ | περιοχή 0, $y_2 = \frac{1}{y_1}$.

(B) Είναι $f(x) < 0 \mid x \in (\alpha, \theta)$.

(I_B) Αν $f'(x) > 0 \leadsto y_1 \uparrow$ και $y_2' < 0 \leadsto y_2 \downarrow$.

α) $f'' > 0 \leadsto y_1$ κοίτη, και y_2 υπερή διότι $\frac{2f'^2 - ff''}{f^3} < 0$.

β) $f'' < 0 \leadsto y_1$ υπερή, και y_2 κοίτη αν $y_2'' > 0$, υπερή

αν $y_2'' < 0$, έχει σ.υ. αν $2[f'(x_k)]^2 - f(x_k) \cdot f''(x_k) = 0$ με

$y_2'''(x_k) \neq 0$ που τελικά παγιώνεται από το $f'''(x_k) \neq 0$

(ωστόσο ισχύει).

γ) $f''(x_k) = 0 \leadsto y_1$ έχει σ.υ. στο $[x_k, f(x_k)]$ αν

$f'''(x_k) \neq 0$ (ωστόσο ισχύει) και y_2 υπερή διότι $\frac{2f'^2 - ff''}{f^3} =$
 $= \frac{2f'^2}{f^3} < 0$.

(II_B) Αν $f'(x) < 0 \leadsto y_1 \downarrow$ και $y_2' > 0 \leadsto y_2 \uparrow$.

α) $f'' > 0 \leadsto y_1$ κοίτη και y_2 υπερή.

β) $f'' < 0 \leadsto y_1$ υπερή και y_2 κοίτη ή υπερή ή

έχει σ.υ. (ωστόσο ισχύει).

γ) $f''(x_k) = 0 \leadsto y_1$ έχει σ.υ. $[f'''(x_k) \neq 0]$ και y_2 υπερή.

(III) Αν $f'(x_k) = 0$

α) $f''(x_k) > 0 \leadsto y_1$ min και $y_2'(x_k) = 0$, $y_2''(x_k) < 0$

$$\leadsto y_2(x_k) \max.$$

$$\theta) f''(x_k) < 0 \leadsto y_1 \max \text{ και } y_2'(x_k) = 0, y_2''(x_k) > 0$$

$$\leadsto y_2(x_k) \min.$$

$$\gamma) f''(x_k) = 0 \leadsto y_1, y_2 \text{ έχουν σ.υ. με μηδενική τιμή.}$$

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ

		y_1'	y_1''	y_1	y_2'	y_2''	y_2
$f > 0$	I_A	+	+	↑ κοίτη	-	;	↓ κοίτη ή ωρτή ή σ.υ.
			-	↑ ωρτή		+	↓ κοίτη
			0	↑ σ.υ.		+	↓ κοίτη
	II_A	-	+	↓ κοίτη	+	;	↑ κοίτη ή ωρτή ή σ.υ.
			-	↓ ωρτή		+	↑ κοίτη
			0	↓ σ.υ.		+	↑ κοίτη
	III_A	0	+	min	0	-	max
			-	max		+	min
			0	σ.υ.		0	σ.υ.
$f < 0$	I_B	+	+	↑ κοίτη	-	-	↓ ωρτή
			-	↑ ωρτή		;	↓ κοίτη ή ωρτή ή σ.υ.
			0	↑ σ.υ.		-	↓ ωρτή
	II_B	-	+	↓ κοίτη	+	-	↑ ωρτή
			-	↓ ωρτή		;	↑ κοίτη ή ωρτή ή σ.υ.
			0	↓ σ.υ.		-	↑ ωρτή
	III_B	0	+	min	0	-	max
			-	max		+	min
			0	σ.υ.		0	σ.υ.

Ⓐ, Β. $M \in -\infty < f < +\infty$.

$$\alpha) \text{ Αν } f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_k} +\infty \rightsquigarrow y_2' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} \xrightarrow{x \rightarrow x_k} -\frac{+\infty}{[f(x_k)]^2} =$$

$$= -\infty, \text{ με } f(x_k) \neq 0 \cdot \text{ και } \text{αν } f(x_k) = 0 \rightsquigarrow y_2' \rightarrow -\infty \frac{1}{[f(x_k)]^2} =$$

$$= -\infty \cdot \frac{1}{0^+} = -\infty (+\infty) = -\infty.$$

Παράδειγμα: 1) $y_1 = \pm 1 + \sqrt{x}$, $y_2 = \frac{1}{y_1}$, 2) $y_1 = \sqrt[3]{x}$,
 $y_2 = \frac{1}{y_1}$.

$$\beta) \text{ Αν } f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_k} -\infty \rightsquigarrow y_2' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} \xrightarrow{x \rightarrow x_k} -\frac{-\infty}{[f(x)]^2} =$$

$$= +\infty, \text{ με } f(x_k) \neq 0 \cdot \text{ και } \text{αν } f(x_k) = 0 \rightsquigarrow y_2' = +\infty \frac{1}{[f(x_k)]^2} =$$

$$= +\infty \cdot \frac{1}{0^+} = +\infty (+\infty) = +\infty.$$

Παράδειγμα: 1) $y_1 = \pm 1 - x^{1/2}$, $y_2 = \frac{1}{y_1}$, 2) $y_1 = \sqrt[5]{x}$,
 $y_2 = \frac{1}{y_1}$.

Γ. Είναι $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_k} \infty$.

Στο πρώτο πακέτο, σελ. 6-9, σχ. α₁, β₄, γ₁, δ₄ έχουμε για το α₁ α.χ. $f \rightarrow +\infty$, $f' \rightarrow +\infty$, $f'' \rightarrow +\infty$, κ.λ.δ. και η σχέση (1), § 3 του τετάρτου πακέτου γίνεται: $y_2' = -\frac{f'}{f^2} = -\frac{\infty}{\infty^2}$.

Πώς όμως μπορούμε να αποχωρήσουμε αν δεν κά-
νουμε τις σχετικές αποχωρήσεις; Όπως : $\frac{x}{x} = 1$, $\frac{x^2}{x} =$
 $= x$, $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$.

Μπορεί ω.χ. να είναι : $y'_2 = -\frac{f'}{f^2} = k$ (=σταθερός)
 $\leadsto -\int f^{-2} df = k \int dx \leadsto \frac{1}{f} = kx \leadsto f = \frac{1}{kx}$.

Π.χ. αν $y_1 = \frac{1}{x} \leadsto y'_1 = -\frac{1}{x^2} \leadsto y''_1 = \frac{2}{x^3}$ και $y_2 = \frac{1}{y_1} =$
 $= x$ (ευθεία) $\leadsto y'_2 = -\frac{f'}{f^2} = -\frac{\frac{1}{x^2}}{(\frac{1}{x})^2} = 1 \neq 0$, $y_2 = \frac{2f'^2 - ff''}{f^3} =$
 $= \frac{2(\frac{1}{x^2})^2 - (\frac{1}{x})(\frac{2}{x^3})}{(\frac{1}{x})^3} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

"H, αν $y_1 = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \leadsto y'_1 = -2x^{-3} \leadsto y''_1 = 6x^{-4}$ και
 $y_2 = \frac{1}{y_1} = x^2 \leadsto y'_2 = -\frac{f'}{f^2} = -\frac{-2x^{-3}}{x^{-4}} = 2x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, $y''_2 =$
 $= \frac{2f'^2 - ff''}{f^3} = \dots = 2 > 0 \leadsto y_2$ κοίτη.

"H, αν $y_1 = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2} \leadsto y'_1 = -\frac{1}{2} x^{-3/2} \leadsto y''_1 = \frac{3}{4} x^{-5/2}$
και $y_2 = \frac{1}{y_1} = x^{1/2} = \sqrt{x} \leadsto y'_2 = \dots = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$
 $\leadsto y_2 \uparrow$, $y''_2 = \dots = -\frac{1}{4} x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} < 0 \leadsto y_2$ ωρτή.

Έτσι, μπορεί ω.χ. να είναι : $y'_2 = -\frac{f'}{f^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$
 $\leadsto -\int f^{-2} df = -\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} \leadsto \frac{1}{f} = -\int \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2} = \dots = \frac{1}{\ln x}$
 $\leadsto y_1 = f(x) = \ln x$.

$$\begin{aligned} \text{Είναι: } \lim_{x \rightarrow 0^+} y'_2 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x(\ln x)^2} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = - \frac{+\infty}{+\infty} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2 \ln x}{x}} = + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{2} \frac{+\infty}{-\infty} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} (+\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

§ 4. Ἡς ζαναμεωῦμε στὰ οἰκώδεα τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων:

$$\text{Εἶναι } y''_2 = \frac{2f'^2 - ff''}{f^3} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ ἂν } 2f'^2 - ff'' = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Λύση:} \quad \text{Καθώμε } f'(x) &= g(f) \text{ ὥστε } \frac{d}{dx} [f'(x)] = \\ &= \frac{d}{dx} [g(f)] \rightsquigarrow f''(x) = \frac{df}{dx} \cdot \frac{d[g(f)]}{df} = f' \frac{d[g(f)]}{df} = \\ &= g \cdot g'. \text{ Καί ἡ ἐξίσωση γίνεται: } 2 \cdot g^2 - f g g' = 0 \text{ ἢ} \\ &g(2g - f g') = 0. \text{ Ἄρα } g = 0, \text{ δηλ. } f' = 0 \rightsquigarrow f(x) = c. \\ \text{καί } 2g - f g' &= 0 \rightsquigarrow f g' = 2g \rightsquigarrow f \frac{dg}{df} = 2g \rightsquigarrow \frac{dg}{g} = \\ &= \frac{2df}{f} \rightsquigarrow \int \frac{dg}{g} = 2 \int \frac{df}{f} + C_1 \rightsquigarrow \ln|g| = 2 \ln|f| + \ln|C_1| \\ &\rightsquigarrow \ln|g| = \ln|C_1 f^2| \rightsquigarrow g = C_2 f^2 \rightsquigarrow f' = C_2 f^2 \rightsquigarrow \frac{df}{dx} = \\ &= C_2 f^2 \rightsquigarrow \frac{df}{f^2} = C_2 dx \rightsquigarrow \int f^{-2} df = C_2 \int dx + C_3 \rightsquigarrow -\frac{1}{f} = \\ &= C_2 x + C_3 \rightsquigarrow f(x) = \frac{1}{\alpha x + \beta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{'Ψάξε: } \text{ἂν } y_1 &= c \rightsquigarrow y_2 = \frac{1}{y_1} = \frac{1}{c \neq 0} \rightsquigarrow y''_2 = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Καί, ἂν } y_1 &= \frac{1}{\alpha x + \beta} \rightsquigarrow y_2 = \frac{1}{y_1} = \alpha x + \beta \rightsquigarrow y''_2 = \\ &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- 1) $y_1 = -\sqrt{-x} = -(-x)^{1/2}$, $y_2 = \frac{1}{y_1} (I_B, \alpha)$. 2) $y_1 = -1 + \frac{1}{x^2} \mid$
 $\mid x < -1$, $y_2 = \frac{1}{y_1} (I_B, \alpha)$. 3) $y_1 = -\frac{1}{x^{1/2}}$, $y_2 = -x^{1/2} (I_B, \theta)$.
- 4) $y_1 = -\frac{1}{x^2} \mid 0 < x$, $y_2 = \frac{1}{y_1} (I_B, \theta)$. 5) $y_1 = \ln x \mid 0 < x < 1$,
 $y_2 = \frac{1}{y_1} (I_B, \theta)$. 6) $y_1 = -1 + \sqrt{x}$, $y_2 = \frac{1}{y_1} (I_B, \theta)$. 7) $y_1 =$
 $= -1 + \sinh x \mid x < \ln(1 + \sqrt{e}) \simeq 0.88$, $y_2 = \frac{1}{y_1} (I_B, \gamma)$. 8)
 $y_1 = -1 + \frac{1}{x^2} \mid 1 < x$, $y_2 = \frac{1}{y_1} (II_B, \alpha)$. 9) $y_1 = -x^{-1/3} \mid 0 < x$,
 $y_2 = \frac{1}{y_1} (II_B, \theta)$. 10) $y_1 = -x^3 \mid 0 < x$, $y_2 = \frac{1}{y_1} (II_B, \theta)$.
- 11) $y_1 = -1 - \tanh x \mid \omega \epsilon \rho \iota \sigma \chi \acute{\eta} \mu \eta \delta \epsilon \nu$, $y_2 = \frac{1}{y_1} (II_B, \gamma)$. 12)
 $y_1 = -1 - \exp x \mid \omega \epsilon \rho \iota \sigma \chi \acute{\eta} 0$, $y_2 = \frac{1}{y_1} (II_B, \gamma)$. 13) $y_1 =$
 $= -1 + \cosh x$, $y_2 = \frac{1}{y_1} (III_B, \alpha)$. 14) $y_1 = \frac{1}{-1 + \cosh x}$,
 $y_2 = \frac{1}{y_1} (III_B, \theta)$. 15) $y_1 = -1 - x^3$, $y_2 = \frac{1}{y_1} (III_B, \gamma)$.

ΧΑΡΑΞΗ ΤΗΣ y_2 ΕΚ ΤΗΣ y_1

Παράδειγμα 1^ο: $y_1 = x^2 + 1$, $y_2 = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Είναι $y_1 = \frac{1}{y_2} \leadsto x = 0$ και

$y_1 = 1$, δηλ. τέμνονται στο
(0, 1) (αναμενόμενο).

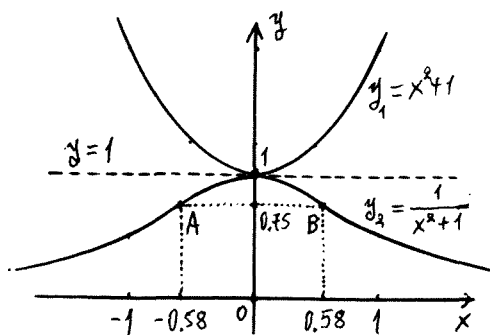
Σημεία ακρότητας:

$$2f'' - ff'' = 2(2x^2) - (x^2 + 1)2 =$$

$$= 8x^2 - 2x^2 - 2 = 6x^2 - 2 = 2(3x^2 - 1) =$$

$$= 0 \leadsto x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \approx \pm 0.58$$

και $y_2(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{(\pm\sqrt{\frac{1}{3}})^2 + 1} = \frac{3}{4}$. Όποτε έχουμε β.μ. στα σημεία $A(-\sqrt{1/3}, \frac{3}{4})$, $B(\sqrt{1/3}, \frac{3}{4})$.



Σχ. 28.

Παράδειγμα 2^ο: $y_1 = e^{x^2}$, $y_2 = \frac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2}$ (ή εξισ.

συν. παρανομής Gauss ή κώδων του Gauss).

Τέμνονται αν $e^{x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} = \pm 1, \text{ αλλά } e^{x^2} > 0.$$

$$\text{"Άρα } e^{x^2} = 1 = e^0 \leadsto x = 0 \leadsto$$

$$y = e^0 = 1 \text{ (αναμενόμενο).}$$

Σημ. ακρότητας: $2f'' - ff'' =$

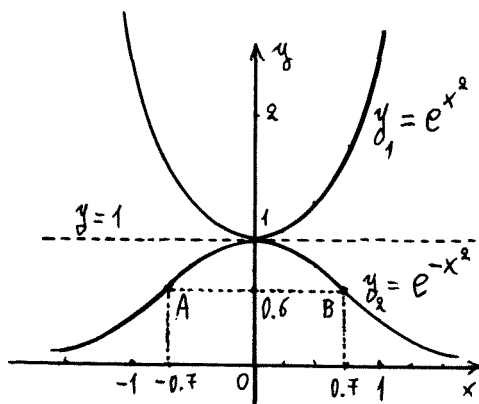
$$= 2(e^{x^2} \cdot 2x)^2 - e^{x^2}(e^{x^2} \cdot 2x)' =$$

$$= 8x^2(e^{x^2})^2 - e^{x^2}[e^{x^2}4x^2 + 2e^{x^2}] =$$

$$= (e^{x^2})^2(8x^2 - 4x^2 - 2) = e^{x^2}(4x^2 - 2) =$$

$$= 2e^{x^2}(2x^2 - 1) = 0 \leadsto x_{1,2} = \pm\sqrt{1/2} \approx \pm 0.7 \text{ και } y_2(\pm\sqrt{1/2}) =$$

$$= \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.6.$$



Σχ. 29.

Παράδειγμα 3^ο: $y_1 = \ln x$, $y_2 = \frac{1}{\ln x}$

Τομή: $y_1 = y_2 \rightarrow \ln x = \pm 1$.

Όποτε $\ln x = 1 = \ln e \rightarrow x_1 =$

$= e \approx 2.7$ και $\ln x = -1 =$

$= \ln \frac{1}{e} \rightarrow x_2 = \frac{1}{e} \approx 0.37$.

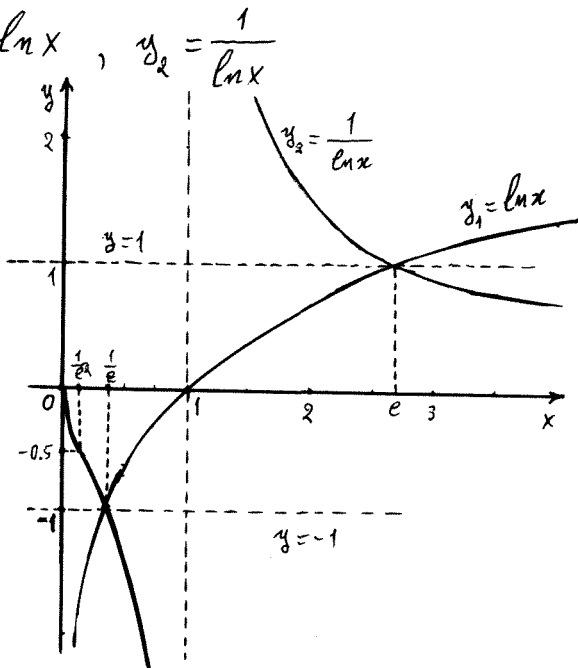
Σ.υ.: $2f' - ff'' = 2\left(\frac{1}{x}\right) -$

$-\ln x \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \dots = \frac{\ln x + 2}{x^2} =$

$= 0 \rightarrow \ln x = -2 \rightarrow x = e^{-2} =$

$= \frac{1}{e^2} \approx 0.14$. Και

$y_2\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{\ln \frac{1}{e^2}} = \dots = -\frac{1}{2}$.



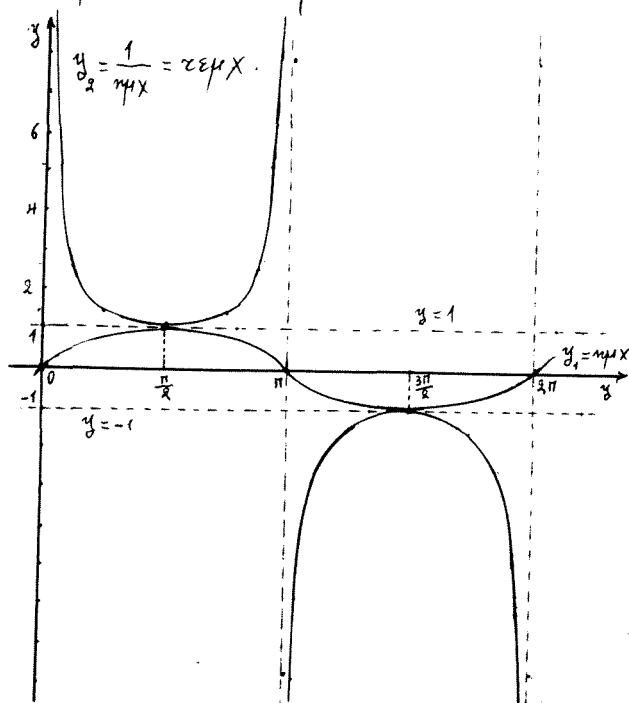
Σχ. 30.

Παράδειγμα 4^ο: $y_1 = \eta\mu x$, $y_2 = \frac{1}{\eta\mu x} = \sigma\epsilon\mu x$.

$y_1 = y_2 \rightarrow \eta\mu x = \pm 1$,

όποτε $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

και $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$.



Σχ. 31.

Παράδειγμα 5^ο: $y_1 = -x^2 - \frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{-x^2 - \frac{1}{2}}$

Τομή: $(-x^2 - \frac{1}{2})^2 = 1 \leadsto$

$-x^2 - \frac{1}{2} = \pm 1 \leadsto x^2 = \mp 1 - \frac{1}{2}$

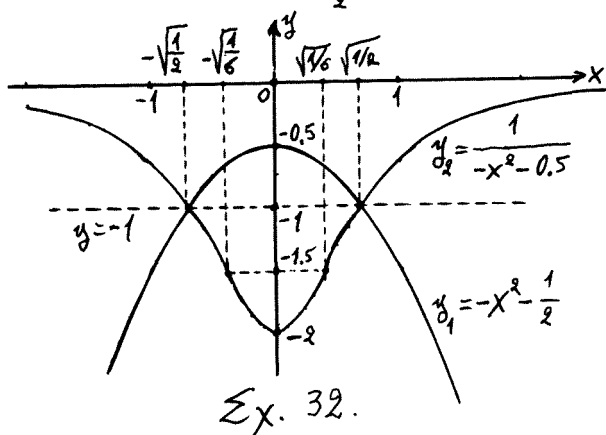
"Αρα $x^2 = -1 - \frac{1}{2} < 0$ άδωπι-
πρέπει και $x^2 = +1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\leadsto x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0.7$

Επίσης, $y_2(0) = -2$ (άνε-
πένετο τότε $y_2 = \frac{1}{y_1}$).

Συμ. α. $2ff' - ff'' = 2(-2x)^2 - (-x^2 - \frac{1}{2})(-2) = \dots = 6x^2 - 1 \leadsto$

$\leadsto x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{6}} \approx \pm 0.4$ και $y_2(\pm \sqrt{1/6}) = \dots = -1.5$.



ΚΑΤΙ ΕΠΙ ΠΛΕΟΝ: Στο σχήμα 5, ως θεωρήσουμε ότι μία ευθεία $x=x_0$ τέμνει τις $y_1=f(x)$, $y_2=1/f(x)$ στα σημεία Κ και Λ. Έτσι, ότι οι εφαπτόμενες των y_1, y_2 στα Κ και Λ τέμνονται μαδέτως.

Ερώτημα: Ποιά είναι η τιμή του x_0 .

Είναι $y'_1=f'$ και $y'_2=(\frac{1}{f})'=-\frac{f'}{f^2}$. Οπότε η $y'_1 \cdot y'_2 = -1$ γίνεται: $f'(-\frac{f'}{f^2}) = -(\frac{f'}{f})^2 = -1 \leadsto \boxed{\frac{f'}{f} = \pm 1}$ (Α).

Όσοι: $f=x^2+1$, $f'=2x$. Άρα $\frac{2x}{x^2+1} = \pm 1$ ή $\pm x^2 - 2x \pm 1 = 0$ και $x_0 = \pm 1$.

Για το σχ. 6: $f=e^{x^2}$, $f'=2xe^{x^2}$. Άρα $\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}} = \pm 1$ ή $2xe^{\frac{x^2}{2}} \mp e^{\frac{x^2}{2}} = 0 \leadsto x_0 = \pm \frac{1}{2}$.

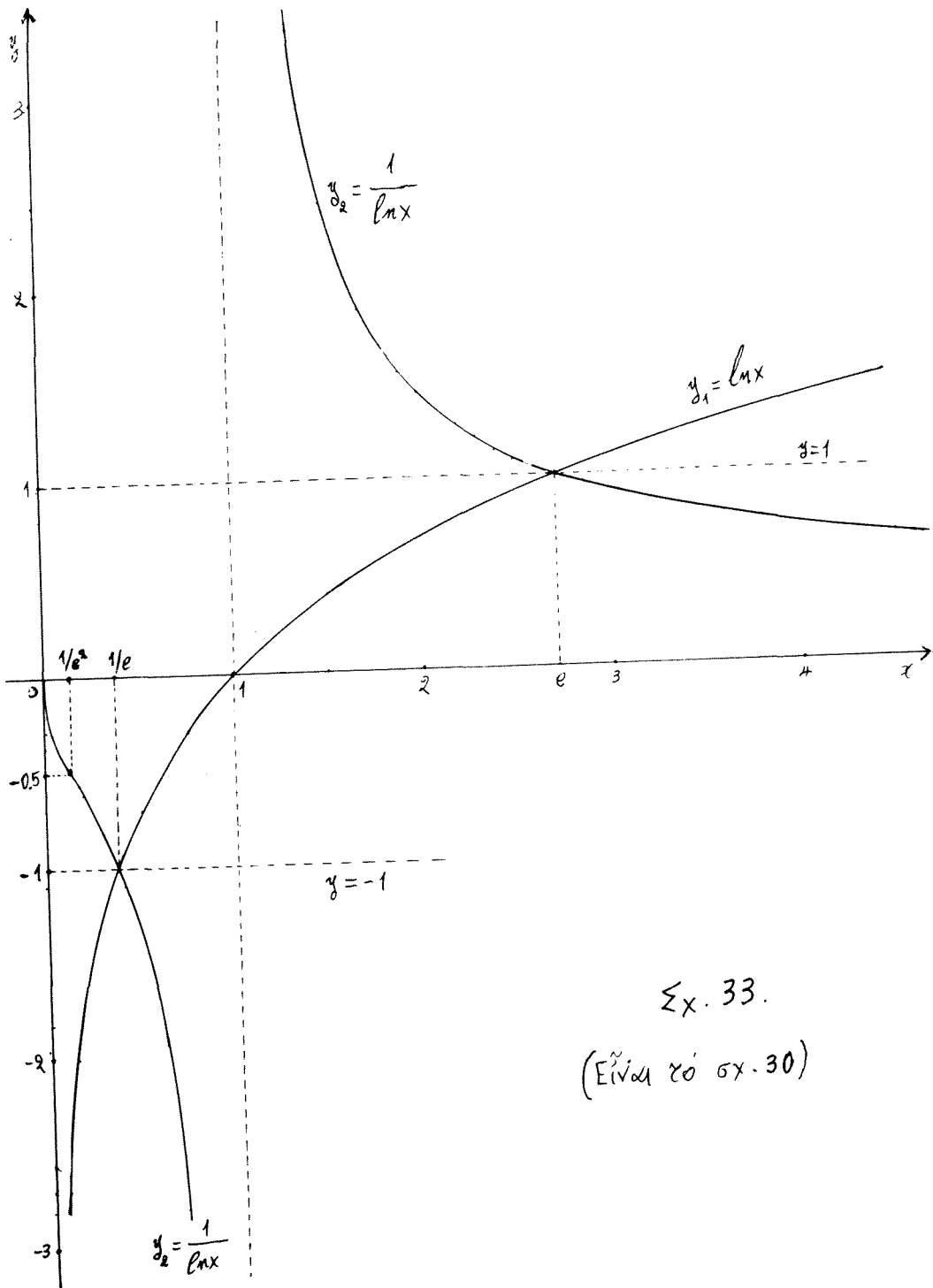
Για το σχ. 7: $f=\ln x$, $f'=\frac{1}{x}$. Άρα $\frac{1/x}{\ln x} = \pm 1$ ή $\ln x^{\pm 1} = \pm 1 = \ln e^{\pm 1} \leadsto x^{\pm 1} = e^{\pm 1} \leadsto x^{\pm 1} = e^{\pm 1} \leadsto x_0 \approx 1.763$. Η $x^{\pm 1} = e^{-1}$ απορρίπτεται διότι $e^{-1} \approx 0.3 < \min(x^{\pm 1}) \approx 0.6$.

Για το σχ. 8: $f=\pi x$, $f'=\pi$. Άρα $\frac{\pi}{\pi x} = \pm 1$ ή $\pi x = \pm 1 \leadsto x_0 = \pm \frac{1}{\pi}$.

Για το σχ. 9: $f=-x^2-\frac{1}{2}$, $f'=-2x$. Άρα $\frac{-2x}{-x^2-\frac{1}{2}} = \pm 1$ ή $\pm 2x^2 - 4x \pm 1 = 0$ και $x_{01} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_{02} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Έτσι, από την παραπάνω γενική σχέση (Α) συνάγεται: $\frac{df}{f} = \pm dx$ ή $\int \frac{df}{f} = \pm \int dx + C_1$ ή $\ln|f| = \pm x + C_1 \leadsto f = \pm e^{\pm x + C_1} = \pm e^{\pm x} \cdot e^{C_1} = ce^{\pm x}$ (δύο οικογένειες γραμμών), με $c \neq 0$.

Όσοι: αν $y_1 = ce^x$, $y_2 = \frac{1}{ce^x} = \frac{1}{c} e^{-x} \leadsto y'_1 \cdot y'_2 = ce^x \cdot (-\frac{1}{c} e^{-x}) = -1$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.



$\Sigma x. 33.$
 (Εἶναι τοῦ σ.χ. 30)

$$\text{ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ } y = \frac{1}{e^{(\ln x)^2}}.$$

Ⓐ. Θεωρώ την $y_1 = x \mid 0 < x$ και ζητώ την $y_2 = \ln x$.
(Βλέπε παραμέτρο 3).

Β. Θεωρώ την $y_1 = \ln x$ και ζητώ την $y_2 = (\ln x)^2$.
(Βλέπε παραμέτρο 1).

Γ. Θεωρώ την $y_1 = (\ln x)^2$ και ζητώ την $y_2 = e^{(\ln x)^2}$.
(Βλέπε παραμέτρο 2).

Δ. Θεωρώ την $y_1 = e^{(\ln x)^2}$ και ζητώ την $y_2 = \frac{1}{e^{(\ln x)^2}}$.
(Βλέπε παραμέτρο 4).

Ὅς εργαζοῦμε πρῶτα:

Ⓐ'. Εἶναι $y = \ln x \mid 0 < x \leadsto y' = \frac{1}{x} > 0 \leadsto \uparrow$, $y'' = -\frac{1}{x^2} < 0 \leadsto$ κυρτή. Ἐπίσης, $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$,
 $\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $\ln x < 0 \mid 0 < x < 1$, $\ln x > 0 \mid 1 < x$.

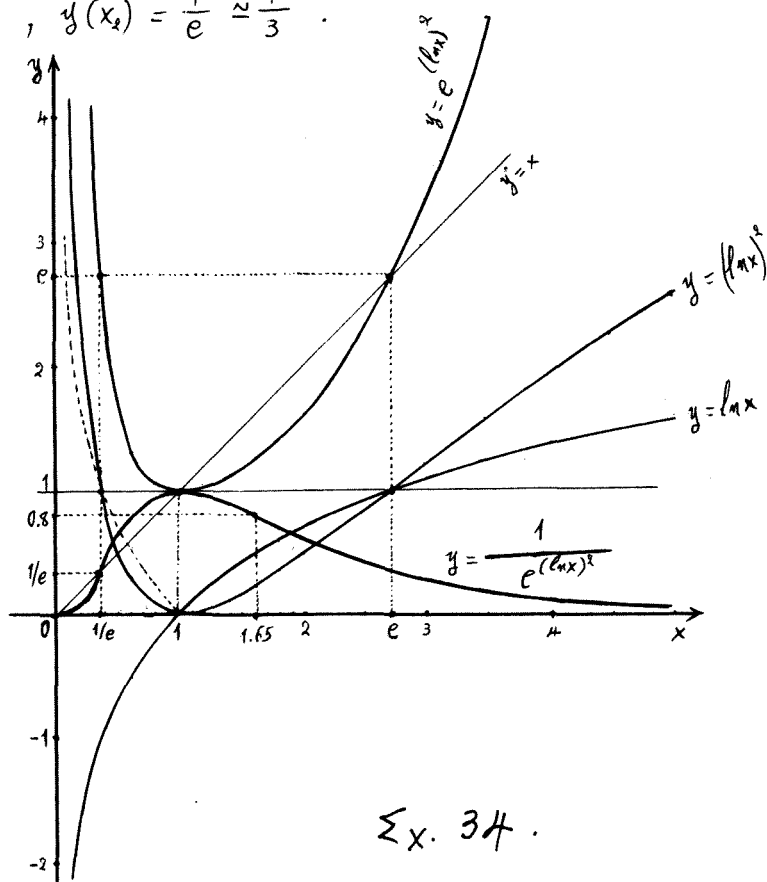
Β'. Εἶναι $y = (\ln x)^2 \leadsto y' = \frac{2 \ln x}{x} = 0$ αν $\ln x = 0 \leadsto x = 1$
ἄρα ἀπόστατο ἢ σημείο καμπῆς. Ἐπίσης, $y' < 0 \mid 0 < x < 1 \leadsto \downarrow$ καὶ $y' > 0 \mid 1 < x \leadsto \uparrow$. Καὶ $y(1) = 0$. Ὡστε στο
(1, 0) ἔχομε min (y, παραγωγισίμος). Ἀλλά καὶ $y'' = \dots$

$\dots = \frac{2}{x^2} (1 - \ln x)$, $y''(1) = 2 > 0$, δηλ. min. Είναι δε $y'' = 0$ αν $1 - \ln x = 0 \leadsto x = e$ και $y(e) = 1$. Όσοτε στο $(e, 1)$ έχουμε σ.υ. Επίσης $y \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, $y\left(\frac{1}{e}\right) = 1$, $y \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

(Γ'). Είναι $y = e^{(\ln x)^2} \leadsto y' = \frac{2 \ln x \cdot e^{(\ln x)^2}}{x} = 0$ αν $\ln x = 0 \leadsto x = 1$. άρα μπορούμε ή σ.υ. Επίσης, $y' < 0 \mid 0 < x < 1 \leadsto \downarrow$ και $y' > 0 \mid 1 < x \leadsto \uparrow$. Και $y(1) = 1$. Όσοτε στο $(1, 1)$ έχουμε min (y , παραγωγισίμος). Άλλα και $y'' = \dots = \frac{2}{x^2} e^{(\ln x)^2} [2(\ln x)^2 - \ln x + 1]$, $y''(1) = 2 > 0$, δηλ. min. Είναι δε $y'' = 0$ αν $2(\ln x)^2 - \ln x + 1 = 0 \leadsto \ln x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{4}$ αδύνατον. άρα δεν έχει σ.υ. Επίσης, $y \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, κ.λ.ω.

(Δ'). Είναι: $y = \frac{1}{e^{(\ln x)^2}} \leadsto y' = \dots = -\frac{2 \ln x}{x e^{(\ln x)^2}} = 0$ αν $\ln x = 0 \leadsto x = 1$. άρα μπορούμε ή σ.υ. Επίσης, $y' > 0 \mid 0 < x < 1 \leadsto \uparrow$ και $y' < 0 \mid 1 < x \leadsto \downarrow$. Και $y(1) = 1$. Όσοτε στο $(1, 1)$ έχουμε max (y , παραγωγισίμος). Άλλα και $y'' = \dots = \frac{2}{x^2} e^{-(\ln x)^2} [2(\ln x)^2 + \ln x - 1]$, $y''(1) = -2 < 0$, δηλ. max. Είναι δε $y'' = 0$ αν $2(\ln x)^2 + \ln x - 1 = 0 \leadsto$

$$\ln x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \leq \frac{1}{x}, \text{ 'noi } x_1 \simeq 1.65, x_2 = \frac{1}{e} \cdot \text{ uai } y(x_1) \simeq 0.8, y(x_2) = \frac{1}{e} \simeq \frac{1}{3}.$$



ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

ΑΠΟ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ $y = (1+a)^x - (1+ax)$ ΣΤΗΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ BERNOLLI

Αναστάσιος Περιστερόπουλος
ΤΕΙ Πατρών

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ $y_1 = (1+a)^x$, $y_2 = 1+ax$

Προλεγόμενα 1: Δίνονται $y_3 = x$, $y_4 = \ln(1+x)$ με $-1 < x$ και ζητείται να συγκριθούν.

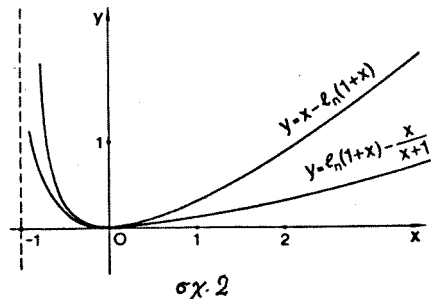
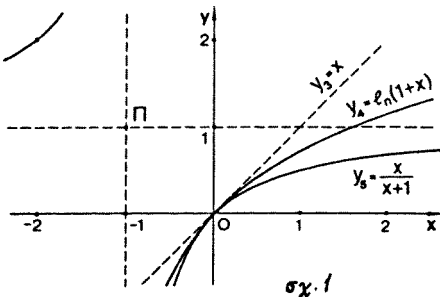
Έστω η προφανώς συνεχής συνάρτηση: $y = y_3 - y_4 = x - \ln(1+x)$ με $-1 < x$. (σχ. 1)

Είναι: $y' = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$. Εξετάζουμε την ανισότητα $\frac{x}{x+1} > 0 \rightarrow x(x+1) > 0$.

Έστω, αν $x < -1$ ή $0 < x - y' > 0$, δηλ. $y \uparrow \forall x \in \mathbb{R}_+$,
και επειδή $y(0) = 0 - y = y_3 - y_4 > 0$, δηλ. $y_3 > y_4$. Ομοίως, αν $-1 < x < 0 - y' < 0$,
δηλ. $y \downarrow \forall x \in (-1, 0)$ και άρα (επειδή $y(0) = 0$) $y = y_3 - y_4 > 0$, δηλ. $y_3 > y_4$.
Τελικά, $y_3 > y_4 \forall x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

Σημείωση: Η γραφική παράσταση της $y = x - \ln(1+x)$ αποδίδεται στο σχ. 2.

Προλεγόμενα 2: Δίνονται $y_4 = \ln(1+x)$, $y_5 = \frac{x}{x+1}$ με $-1 < x$ και ζητείται να συγκριθούν, (σχ. 1).

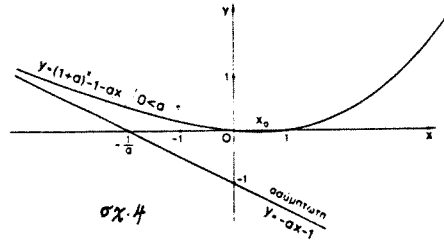
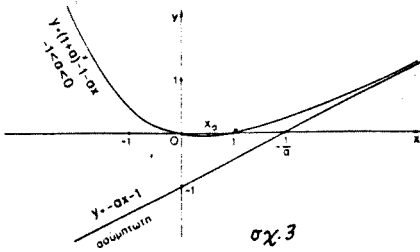


Έστω η προφανώς συνεχής συνάρτηση: $y = y_4 - y_5 = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$ με $-1 < x$.

Είναι: $y' = y'_4 - y'_5 = \dots = \frac{x}{(x+1)^2}$.

Έστω, αν $0 < x - y' > 0$ δηλ. $y \uparrow \forall x \in \mathbb{R}_+$ και επειδή $y(0) = 0 - y = y_4 - y_5 > 0$, δηλ. $y_4 > y_5$.
Ομοίως, αν $-1 < x < 0 - y' < 0$, δηλ. $y \downarrow \forall x \in (-1, 0)$ και άρα (επειδή $y(0) = 0$) $y = y_4 - y_5 > 0$, δηλ. $y_4 > y_5$. Τελικά, $y_4 > y_5 \forall x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

Σημείωση: Η γραφική παράσταση της $y = \ln(1+x) - \frac{x}{x+1}$, αποδίδεται στο σχ. 2.



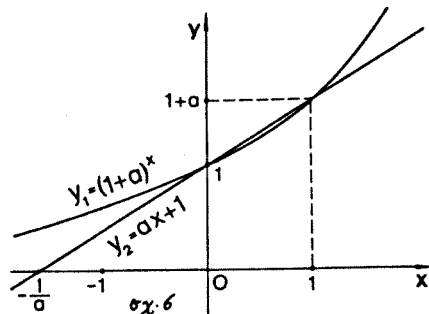
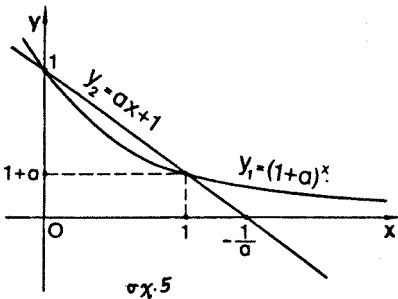
Εισαγωγή στο θέμα: Αν είναι $y = y_1 - y_2 = (1+\alpha)^x - (1+\alpha x) = (1+\alpha)^x - 1 - \alpha x - y' = (1+\alpha)^x \ln(1+\alpha) - \alpha$. Ακρότατο έχουμε όταν $(1+\alpha)^x \ln(1+\alpha) - \alpha = 0 \Rightarrow (1+\alpha)^{x_0} = \frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)}$. Είναι δε $1 < \frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)} < 1+\alpha$, αν $\alpha > 0$ και

$1+\alpha < \frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)} < 1$, αν $-1 < \alpha < 0$, (βλέπε προλεγόμενα 1 και 2).

Άρα για $0 < x_0 < 1$ έχουμε ακρότατο για την $y = y_1 - y_2$. Είναι ακόμη: $y'' = (1+\alpha)^x [\ln(1+\alpha)]^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα η y είναι κοίλη, οπότε το ακρότατο είναι ελάχιστο. Κι επειδή $y(0) = 0$ και $y(1) = 0$ συμπεραίνεται ότι:

Αν $x < 0 \Rightarrow y_1 > y_2$, αν $x = v = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$, αν $0 < x < 1 \Rightarrow y_1 < y_2$, αν $x = v = 1 \Rightarrow y_1 = y_2$ και αν $1 < x = v \Rightarrow y_1 > y_2$, $\forall v \in \mathbb{N}$. Ωστε είναι: $(1+\alpha)^v \geq 1 + v\alpha$, $\forall v \in \mathbb{N}$ και $\alpha > -1$.

Τα σχήματα 3 και 4 αποδίδουν τις γραφικές παραστάσεις των $y = (1+\alpha)^x - 1 - \alpha x$ με $-1 < \alpha < 0$ και $0 < \alpha$ αντιστοίχως (με $\alpha = -\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα, οπότε, $x_0 = 0,47$ και $0,52$).



Τα σχήματα 5 και 6 αποδίδουν τις $y_1 = (1+\alpha)^x$, $y_2 = -\alpha x + 1$, με $-1 < \alpha < 0$ και $0 < \alpha$ αντιστοίχως.

ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ $y_1 = x^\omega$, $y_2 = \ln x$ $| 0 < x, \omega \in (0, 1)$

Αθανάσιος Φ. Περιστέρησ
Καθηγητής Τ.Ε.Ι. Πατρών.

Στο τμήμα 26, τόμος 7, Ευκλείδης Γ'-1990 της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας αποδείξαμε ότι $\ln x < \ln(1+x) < x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$.

Κρατούμενο 1: Αν $\omega = 1 \leadsto y_1 = x$, δηλ. η φράση διχοτόμος. Αν $\omega > 1$ η $y_1 = x^\omega$ είναι $\uparrow$ και κοίτη. Και, αν $0 < \omega < 1$ η $y_1 = x^\omega$ είναι $\uparrow$ και κυρτή. Ας αποδείξουμε το δεύτερο:

Είναι $y_1' = \omega x^{\omega-1} > 0 \leadsto y_1 \uparrow$ και $y_1'' = \omega(\omega-1)x^{\omega-2} < 0 \leadsto$ κυρτή.

Κρατούμενο 2: Η $y_2 = \ln x$ είναι $\uparrow$ και κυρτή. Διότι είναι $y_2' = \frac{1}{x} > 0$ και $y_2'' = -\frac{1}{x^2} < 0$.

Εισαγωγή στο θέμα: Το ερώτημα είναι: τέμνονται οι y_1, y_2 ; Μορφώνουμε την συνάρτηση $y = y_1 - y_2 = x^\omega - \ln x$. (Προφανώς $y_1 > y_2 \quad | 0 < x < e$).

Είναι $y' = (x^\omega - \ln x)' = \omega x^{\omega-1} - \frac{1}{x} = \frac{\omega x^\omega}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (\omega x^\omega - 1) = 0$
 $\leadsto \omega x^\omega - 1 = 0 \leadsto x^\omega = \frac{1}{\omega} \leadsto \boxed{x_0 = \left(\frac{1}{\omega}\right)^{1/\omega}}$. Δηλ. έχουμε ακρότατο.

Επίσης, $y'' = \omega(\omega-1)x^{\omega-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{\omega(\omega-1)x^\omega}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} [\omega(\omega-1)x^\omega + 1]$
και $y''(x_0) = \frac{1}{x_0^2} [\omega(\omega-1)x_0^\omega + 1] = \frac{1}{x_0^2} [\omega(\omega-1)\frac{1}{\omega} + 1] = \frac{1}{x_0^2} \cdot \omega > 0$

$\leadsto$ η y έχει $\min$ στο σημείο $M_0(x_0, y_0)$, όπου $x_0 = \left(\frac{1}{\omega}\right)^{1/\omega}$ και
 $y_0 = y(x_0) = y_1(x_0) - y_2(x_0) = x_0^\omega - \ln x_0 = \frac{1}{\omega} - \ln \left(\frac{1}{\omega}\right)^{1/\omega} = \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega} \ln \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} (1 - \ln \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} (\ln e - \ln \frac{1}{\omega}) = \frac{1}{\omega} \ln(\omega e)$.

ΩΣΤΕ: Αν $\omega e > 1$, δηλ. $\omega > \frac{1}{e} \leadsto \ln(\omega e) > 0$. άρα $y_0 = y_1 - y_2 > 0$
 $\leadsto y_1(x_0) > y_2(x_0)$.

$\forall \omega e = 1, \delta \eta \lambda. \omega = \frac{1}{e} \rightarrow \ln(\omega e) = 0 \cdot \text{άρα } y_0 = y_1 - y_2 = 0$
 $\rightarrow y_1(x_0) = y_2(x_0)$. Ήτοι, οι y_1, y_2 εφάπτονται στο σημείο
 $M_0[x_0, y_1(x_0) = y_2(x_0)]$.

Είναι $x_0 = \left(\frac{1}{\omega}\right)^{1/\omega} = e^e \simeq 15.15$ και $y_1(x_0) = x_0^\omega = \frac{1}{\omega} = e$,
 ή $y_2(x_0) = \ln x_0 = \ln e^e = e$. Και,

$\forall \omega e < 1, \delta \eta \lambda. \omega < \frac{1}{e} \rightarrow \ln(\omega e) < 0 \cdot \text{άρα } y_0 = y_1 - y_2 < 0$
 $\rightarrow y_1(x_0) < y_2(x_0)$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Όλες οι (κυρτές) $y_1 = x^\omega \mid \frac{1}{e} < \omega < 1$ είναι
 «ωάινω» από την $y_2 = \ln x, \forall x \in \mathbb{R}_+$.

Η $y_1 = x^{1/e}$ (υπέριξη παμωδύνη) είναι και αυτή «ωάινω» από
 την $y_2, \forall x \in (\mathbb{R}_+ - x_0)$, όπου εφάπτονται στο σημείο $M_0(e^e, e)$.

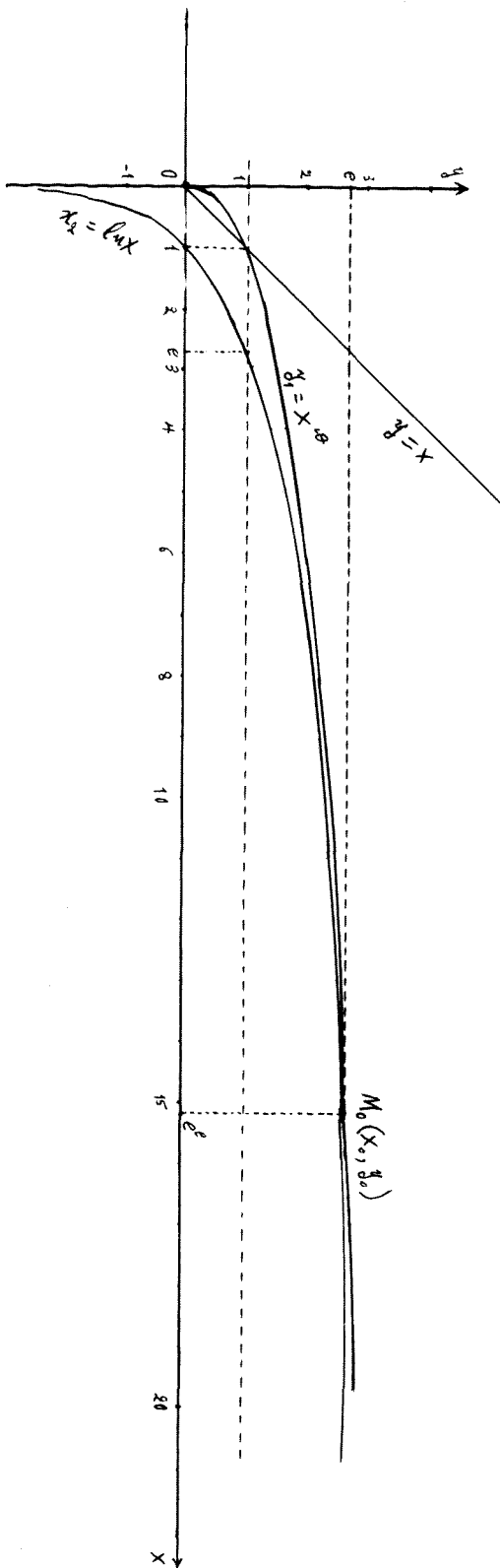
Και, όλες οι (κυρτές) $y_1 = x^\omega \mid 0 < \omega < \frac{1}{e}$ τέμνουν την y_2
 στα $e < x_1 < x_0$ και $x_0 < x_2 < +\infty$.

Τέλος, αν $\omega \rightarrow 0^+$, τότε $x_1 \rightarrow e^+$ και $x_2 \rightarrow +\infty$. Και, αν
 $\omega \rightarrow \left(\frac{1}{\omega}\right)^-$, τότε $x_1 \rightarrow (e^e)^-$ και $x_2 \rightarrow (e^e)^+$.

ΑΣΚΗΣΗ 1: Αν $y_1 = x, y_2 = \lg x = \frac{\ln x}{\ln \alpha}$, ποιά η αμνητού
 α ώστε οι y_1, y_2 να εφάπτονται;

Λύση: Όπως και παρ'απάνω: $y = y_1 - y_2 = x - \frac{\ln x}{\ln \alpha} \rightarrow y' = 1 - \frac{1}{x \ln \alpha} =$
 $= \frac{x \ln \alpha - 1}{x \ln \alpha} = 0 \rightarrow x \ln \alpha - 1 = 0 \rightarrow \boxed{x_0 = \frac{1}{\ln \alpha}}, y'' = \frac{1}{x^2 \ln \alpha} > 0 \forall x \in \mathbb{R}_+$

$\rightarrow y$ min στο $M_0(x_0, y_0)$. Είναι: $y_0 = y_1(x_0) - y_2(x_0) = x_0 - \frac{\ln x_0}{\ln \alpha} =$
 $= \frac{1}{\ln \alpha} - \frac{\ln x_0}{\ln \alpha} = \frac{1 - \ln x_0}{\ln \alpha} = \frac{1 - \ln(1/\ln \alpha)}{\ln \alpha} = \frac{1 + \ln(\ln \alpha)}{\ln \alpha}$.



ΟΣΤΕ: Αν $y_0 = \frac{1 + \ln(\ln \alpha)}{\ln \alpha} = 0$
 $\rightarrow 1 + \ln(\ln \alpha) = 0 \rightarrow \ln e + \ln(\ln \alpha) =$
 $= 0 \rightarrow \ln(e \ln \alpha) = \ln 1 \rightarrow$
 $\ln(\alpha^e) = 1 = \ln e \rightarrow \alpha^e = e$
 $\rightarrow \alpha = e^{1/e} = \sqrt[e]{e} \simeq 1.4$
 Ή ΟΣΤΕ η $y_2 = \lg_{\frac{e}{e}} x$ είναι
 η αντίστροφη παραγωγή. Και
 $x_0 = \frac{1}{\ln \alpha} = \frac{1}{\ln e^{1/e}} = \frac{1}{\frac{1}{e} \ln e} =$
 $= e \simeq 2.7$, κ.τ.λ.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Είναι $y_1 = \ln x$ και $y_2 = \lg_{1/e} x = \frac{\ln x}{\ln \frac{1}{e}} = \dots = -\ln x = -y_1$.

Επίσης, $y_3 = (\frac{1}{e})^x = e^{-x}$ και $y_4 = x$. Πώς τέμνονται οι y_2, y_3, y_4 ;

Λύση: Είναι $y_4 = y_2 \rightarrow$

$$x = -\ln x \rightarrow x_0 + \ln x_0 = 0.$$

Επίσης, $y_4 = y_3 \rightarrow x = e^{-x}$

$$\rightarrow \ln x = -x \ln e = -x \rightarrow$$

$$\ln x_0 + x_0 = 0. \text{ Άρα διέρχονται}$$

και από το $M(x_0, x_0)$.

Υπάρχει άλλη τομή;

$$\text{Είναι } y = y_2 - y_3 = -\ln x -$$

$$e^{-x} \rightarrow y' = -\frac{1}{x} + e^{-x} =$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{e^x} = \frac{-e^x + x}{x e^x} < 0. \text{ Διότι } -e^x + x < 0 \rightarrow x < e^x \rightarrow \ln x < x$$

$$(\text{βλέπε σελ. 120}). \text{ Άρα } y \downarrow. \text{ Επίσης, } y'' = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{e^x} = \frac{e^x - x^2}{x^2 e^x} > 0.$$

$$\text{Διότι } e^x - x^2 > 0 \rightarrow e^x > x^2, \text{ το αντίστοιχο, } \ln x < \sqrt{x} = x^{1/2} (\text{βλέ-$$

$$\text{πε σελ. 122), διότι } \frac{1}{e} < \frac{1}{2}. \text{ Άρα } y \text{ πείγμα. Επίσης, } \lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty -$$

$$-1 = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty - 0^+ = -\infty.$$

Άρα οι y_2, y_3 έχουν μία μόνο τομή πάνω στην αριστερή διχοτόμο.

ΑΣΚΗΣΗ 3: Αν $y_1 = \lg_{\alpha} x = \frac{\ln x}{\ln \alpha}$, $y_2 = \lg_{1/\alpha} x = \frac{\ln x}{\ln \frac{1}{\alpha}} = -\frac{\ln x}{\ln \alpha} =$

$$= -y_1, y_3 = (\frac{1}{\alpha})^x = \alpha^{-x}, y_4 = x, \text{ πώς τέμνονται αυτές;}$$

Λύση: Είναι $y_4 = y_2 \rightarrow x = -\frac{\ln x}{\ln \alpha} \rightarrow x_0 \ln \alpha + \ln x_0 = 0$ [ή

$$\ln(\alpha^{x_0} \cdot x_0) = \ln 1 \rightarrow x_0 \alpha^{x_0} = 1 \text{ ή } \alpha^{x_0} = \frac{1}{x_0} \text{ (εξθετική ίσον ισосуεφής$$

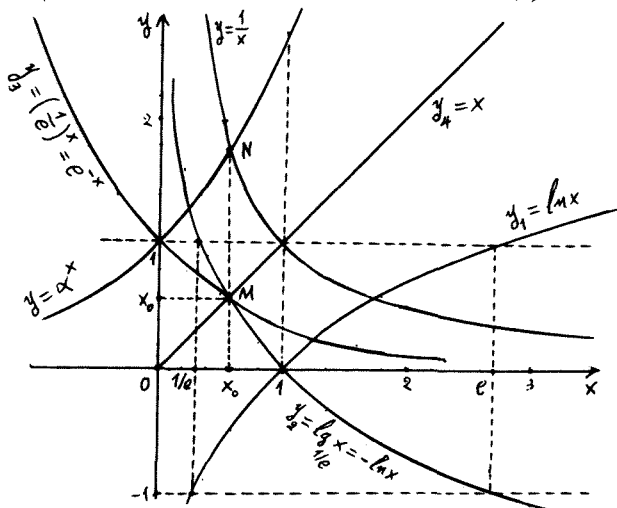
υπερβολή). Και, αν $\alpha \rightarrow +\infty \rightarrow x_0 \rightarrow 0^+$ και αν $\alpha \rightarrow 1^+ \rightarrow x_0 \rightarrow 1^-$]. Επίσης,

$$y_4 = y_3 \rightarrow x = \alpha^{-x} \rightarrow \ln x = -x \ln \alpha \rightarrow \ln x_0 + x_0 \ln \alpha = 0 \text{ (βλέπε$$

σημειώσεις μου: Αριθμητική Ανάγνωση σελ. 12, αν $\alpha = e \rightarrow x_0 \approx 0.62$,

μέθος διχοτομήσεως ή Βολζαμπο). Άρα διέρχονται από το $M(x_0, x_0)$.

Υπάρχει άλλη τομή; Είναι $y = y_2 - y_3 = -\frac{\ln x}{\ln \alpha} - \alpha^{-x} \rightarrow$



$$y' = -\frac{1}{x \ln x} + \alpha^{-x} \ln \alpha = -\frac{1}{x \ln x} + \frac{\ln \alpha}{\alpha^x} = \frac{-\alpha^x + x(\ln \alpha)^2}{x \alpha^x \ln \alpha} > 0.$$

$$\text{Θεωρώ την } \phi(x) = -\alpha^x + x(\ln \alpha)^2 \rightarrow \phi' = -\alpha^x \ln \alpha + (\ln \alpha)^2 = \ln \alpha (-\alpha^x + \ln \alpha) = 0 \rightarrow \alpha^x = \ln \alpha \rightarrow x \ln \alpha = \ln(\ln \alpha) \rightarrow x_p = \frac{\ln(\ln \alpha)}{\ln \alpha}$$

$$[\text{και } \delta\acute{\alpha} \text{ } \alpha\rho\acute{\epsilon}\omega\epsilon\iota \ 0 < x_p \rightarrow \ln(\ln \alpha) > 0 = \ln 1 \rightarrow \ln \alpha > 1 = \ln e \rightarrow \alpha > e$$

$$(\rightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{e}). \text{ Αλλά και } x_p < 1 \rightarrow \frac{\ln(\ln \alpha)}{\ln \alpha} < 1 \rightarrow \ln(\ln \alpha) < \ln \alpha \rightarrow \ln \alpha < \alpha,$$

ωροφανής (βλέπε σελ. 120). Όποτε για $x = x_p$ έχουμε αμύμονο. Είναι $\phi'' = -\alpha^x (\ln \alpha)^2 < 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \rightarrow \phi(x_p) = \max$ και $\phi(x)$ μωρη. Αν $\phi(x_p) = 0 \rightarrow \phi(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R} - x_0 \rightarrow y' < 0$

$\rightarrow y \downarrow$. Αλλά $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} [y_2 - y_3] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [-\frac{\ln x}{\ln \alpha} - \alpha^{-x}] = -\frac{1}{\ln \alpha} (-\infty) - 1 = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} y =$

$\dots = -\frac{1}{\ln \alpha} (+\infty) - 0^+ = -\infty$. Άρα οι y_2, y_3 έχουν μία μόνο κομή. Είναι δέ $\phi(x_p) = 0$ αν $-\alpha^{x_p} + x_p (\ln \alpha)^2 = 0 \rightarrow -\ln \alpha + \ln(\ln \alpha) \cdot \ln \alpha = 0 \rightarrow \ln \alpha [-1 + \ln(\ln \alpha)] = 0 \rightarrow \ln e^{-1} + \ln(\ln \alpha) = 0$

$\rightarrow \ln(\frac{\ln \alpha}{e}) = 0 = \ln 1 \rightarrow \frac{\ln \alpha}{e} = 1 \rightarrow \ln \alpha = e = \ln e \rightarrow \alpha = e \approx 15.15$ (και $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{e} \approx 0.066$).

Αν όμως $\phi(x_p) > 0$, δηλ. $\alpha > e^e$, ($\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{e^e}$) τότε έχουμε $\phi(x_1) = \phi(x_2) = 0$ και $x_1 < x_p < x_2$.

Με $\phi(x) < 0 \mid 0 < x < x_1$, $\phi(x) > 0 \mid x_1 < x < x_2$ και $\phi(x) < 0 \mid x_2 < x$. Ητοι, αντιστοίχως,

$y' < 0 \mid 0 < x < x_1$ και άρα $y \downarrow$, $y' > 0 \mid x_1 < x < x_2$ και άρα $y \uparrow$ και $y' < 0 \mid x_2 < x$ και

άρα $y \downarrow$. Είναι δέ αμύμον $\phi(x_0) = -\alpha^{x_0} + x_0 (\ln \alpha)^2 = -\frac{1}{x_0} + x_0 (\ln \alpha)^2 = \frac{-1 + (x_0 \ln \alpha)^2}{x_0} =$

$= \frac{-1 + (\ln x_0)^2}{x_0}$ και, αν $0 < x_0 < \frac{1}{e}$ ή $-\infty < \ln x_0 < -1$ ή $+\infty > (\ln x_0)^2 > 1$ ή

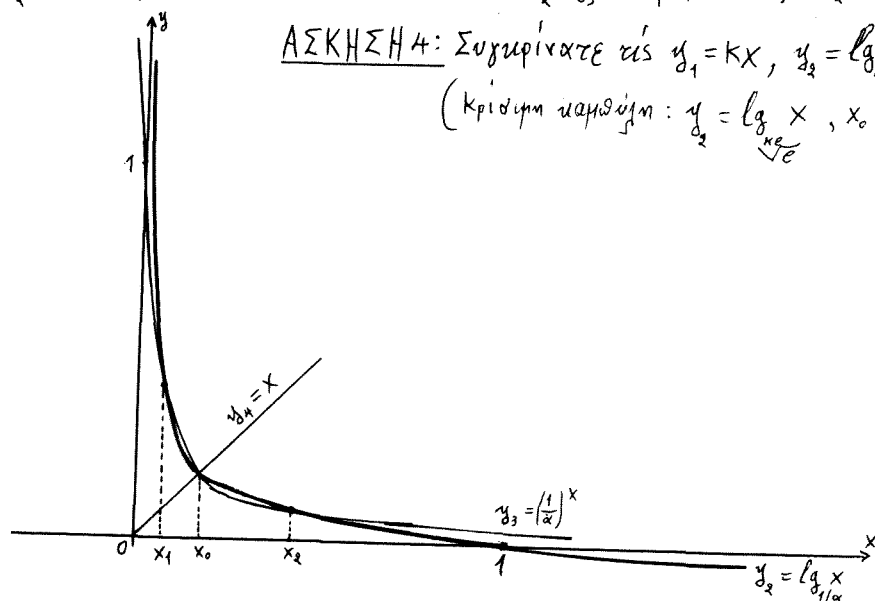
$+\infty > -1 + (\ln x_0)^2 > 0$. Ητοι $\phi(x_0) > 0 \rightarrow y' > 0 \rightarrow y \uparrow$ στο x_0 , δηλ. $x_1 < x_0 < x_2$.

Άρα είναι: $y_2 - y_3 > 0 \mid 0 < x < x_1$ δηλ. $y_2 > y_3$, $y_2 - y_3 < 0 \mid x_1 < x < x_0$ δηλ. $y_2 < y_3$,

$y_2 - y_3 > 0 \mid x_0 < x < x_2$ δηλ. $y_2 > y_3$ και $y_2 - y_3 < 0 \mid x_2 < x$ δηλ. $y_2 < y_3$.

ΑΣΚΗΣΗ 4: Συμπερίνατε τις $y_1 = kx$, $y_2 = \lg_{\alpha} x$.

(κρίσιμη παραμύνη: $y_2 = \lg_{\frac{kx}{e}} x$, $x_0 = ke$).



Εδωγγ. Σ. Σταμάτης

ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

Αναστασίου Φ. Περιστεροπούλου

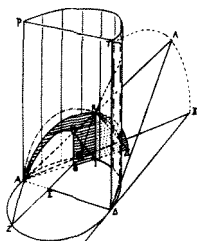
ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ Ή ΤΩΝ ΕΠΑΦΩΝ

σελίδες 126, Αθήναι 1972

Ο εκ της πόλεως Πέργης της Παμφυλίας, της Μ. 'Ασίας, διάσημος μαθηματικός της αρχαιότητας 'Απολλώνιος, ο άποκαλούμενος συνήθως Απολλώνιος ο Περγαιός, ή «ο μέγας γεωμέτρης 'Απολλώνιος» (1), ήκμασε κατά τον 3ον αι. π. Χ. (περίπου 260 - 180 π. Χ.), ήτοι ήτο νεώτερος του 'Αρχιμήδους 30 έτη περίπου. Είχε γράψει πλείστα συγγράμματα και θεωρείτο εφάμιλλος του 'Αρχιμήδους. Τό σπουδαιότερον έργον του είναι Περί τών κωνικών τομών εις 8 βιβλία, εις τώ όποιον ο 'Απολλώνιος είχε δώσει τόν τίτλον «Κωνικών». Έκ τών όκτώ τούτων βιβλίων έσωθήσαν διά τέσσαρα πρώτα εις την 'Ελληνικήν και τά έν συνεχεία τρία εις την άραβικήν, έν ψ το όγδοον άπωλώσθη. Τά τέσσαρα πρώτα βιβλία τών Κωνικών έκυκλοφόρησαν έν τη Δυτική Εύρώπη εις την λατινικήν περί τώ έτος 1250 και έξής. Τό 'Ελληνικόν κείμενον μέ λατινικήν μετάφρασιν έξεδόθη τό πρώτον, διά του τύπου, εις την 'Οξφόρδην κατά τό 1710, ύπό του περιφήμου μαθηματικού και άστρονόμου 'Αγγλου, Χάλλεϋ (Halley). 'Υπό του ίδιου έξεδόθησαν κατά τόν αυτόν χρόνον έν 'Οξφόρδη εις την λατινικήν και τά βιβλία 5, 6, 7 τά σφζόμενα εις την άραβικήν. Λίαν δέ προσεχώς όλα τά σφζόμενα έργα του 'Απολλωνίου θά έκδοθώσιν έν 'Αθήναις ύπό του Τεχνικού Έπιμελητηρίου της 'Ελλάδος.

Μεταξύ τών άπολεσθέντων συγγραμμάτων του 'Απολλωνίου μνημονεύεται και τό Περί έπαφών (2). Έκ τών πληροφοριών τάς όποιās παρέχει σχετικώς ο Πάππος ('Αλεξάνδρεια, 4ος αιών) έγινεν άνακατασκευή του περιεχομένου του βιβλίου ταύτου ύπό του Γάλλου μαθηματικού Viète (1540 - 1603) (3), άκολουθώς δέ ύπό τών άλλων Εύρωπαίων

tiker (Αποσπάσματα τών προσωκρατικών φιλοσόφων), Βερολίνον 1951, τόμος Α', σελ. 426.



Σχ. 2

Βιβλιογραφία

1) Archimedis opera omnia ('Αρχιμήδους 'Απαντα) τόμος Γ', σελ. 84-88. Έκδ. Iohan L. Heiberg και Evangelos S. Stamatis, Stutgardiae (Stuttgart Δυτ. Γερμανίας), Έκδοτ. Οίκος B. G. Teubner, 1972.

2) Εδωγγέλου Σ. Σταμάτη, Τό δήλιον πρόβλημα και ή τριχοτόμησης γωνίας, Αθήναι 1949.

3) Μαυρικίου Α. Μπρίκα, Τά περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας, Αθήναι 1970.

μαθηματικών. Μεταξύ τών άλλων έκδόσεων σημειούμεν την γερμανικήν έκδοσιν, εις μηνιαία τεύχη από τό 1881 κ. έ. και την συνολικήν έκδοσιν κατά τό 1881 (4).

Ο κ. Περιστερόπουλος όρθώς σημειώνει εις την Εισαγωγήν, ότι τό κύριον πρόβλημα είναι «Νά γραφή περιφέρεια, έφαπτομένη τριών δοθεισών περιφερειών. 'Επειδή όμως έν σημείω δύναται νά θεωρηθής ως περιφέρεια μέ κέντρον τό σημείον τούτο και άκτίνα μηδενικήν, ως και μία εϋθεία δύναται νά θεωρηθής ως περιφέρεια μέ άκτίνα άπειρώς μεγάλην διά τούτο τό γενικόν πρόβλημα του 'Απολλωνίου αναλύεται εις τά έξής δέκα προβλήματα :

1. Νά γραφή περιφέρεια διερχομένη έκ τριών δεδομένων σημείων.
2. Νά γραφή περιφέρεια έφαπτομένη τριών δοθεισών εϋθειών.
3. Νά γραφή περιφέρεια διερχομένη έκ δύο δεδομένων σημείων και έφαπτομένη δοθείσης περιφέρειας.
4. Νά γραφή περιφέρεια διερχομένη έκ δοθέντος σημείου και έφαπτομένη δύο δοθεισών εϋθειών.
5. Νά γραφή περιφέρεια διερχομένη έκ δύο δεδομένων σημείων και έφαπτομένη δοθείσης περιφέρειας.
6. Νά γραφή περιφέρεια διερχομένη έκ δοθέντος σημείου και έφαπτομένη δοθείσης περιφέρειας και δοθείσης εϋθείας.
7. Νά γραφή περιφέρεια διερχομένη έκ δοθέντος σημείου και έφαπτομένη δύο δοθεισών περιφερειών.
8. Νά γραφή περιφέρεια έφαπτομένη δύο δοθεισών εϋθειών και δοθείσης περιφέρειας.
9. Νά γραφή περιφέρεια έφαπτομένη δοθείσης εϋθείας και δύο δοθεισών περιφερειών.
10. Νά γραφή περιφέρεια έφαπτομένη τριών δοθεισών περιφερειών.

Εις έκαστον τών άνωτέρω δέκα προβλημάτων ο κ. Περιστερόπουλος παραθέτει άνάλυσιν, σύνεσιν, απόδειξιν και διερεύνησιν. Διαπραγματεύεται δέ έκαστον πρόβλημα μέ βαθιτάτην γνώσιν όλων τών λεπτομερειών αυτού, μέ πόντον δυνατόν απλότητα και σαφήνειαν. Εις την 'Ελλάδα διά πρώτην φοράν δημοσιεύεται τό πρόβλημα τών 'Επαφών του 'Απολλωνίου μέ πληρότητα. 'Εκείνο τό όποιον προκαλεί έντόπωσιν και τιμή ιδιαιτέρως την εργασίαν του συγγραφέως είναι ή διερεύνησις έκάστου τών δέκα προβλημάτων.

Ο κ. Περιστερόπουλος δέν έφείσθη κόπων νά άναποκριθής εις τάς νεωτέρας έπιστημονικάς άξιώσεις διά τό πρόβλημα τών 'Επαφών του 'Απολλωνίου. 'Η εις την Εισαγωγήν του βιβλίου άναφερομένη πρόθεσις του συγγραφέως, όπως έκδόση τούτο περιφήμου τούτου προβλήματος και διά τών Άνωτέρων Μαθηματικών, επιτρέπει πλείστας έλπίδας εις τάς μαθηματικάς έρεύνας του κ. Περιστεροπούλου, ο όποιος εις την περιοχόν του προβλήματος τών 'Επαφών θά συνδέση την αρχαίαν 'Ελληνικήν έπιστήμην μέ την σύγχρονον μαθηματικήν εξέλιξιν.

Βιβλιογραφία

(1) Apollonii Pergaei, I. L. Heiberg, vol. 2, σελ. 170, 22 - 24.

(2) Pappus Alexandrinus, Collectionis, F. Hultsch, vol. 2 σελ. 636, 21.

(3) Francois Viète, Opera Mathematica, Leiden ('Ολλανδία) 1646 'Ανατύπωσις G. Hildesheim (Γερμανία) - N. York 1970, σελ. 325.

(4) Kleyers Encyklopädie, das Apollonische Berührungs - Problem, H. Cranz, Stuttgart 1891.

Εδωγγέλος Σ. Σταμάτης



ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΤΟΜΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ
ΚΕΝΤΡΟΝ ΠΥΡΗΝΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ «ΔΗΜΟΚΡΙΤΟΣ»

Τηλ. Διεθ.: ΕΛΛΑΤΟΜ
Τηλέτυπον : 216.199
Τηλέφωνον : 653.021

Καθηγητής Δ. Α. ΚΑΠΠΟΣ
ΠΡΟΕΔΡΟΣ Ε. Ε. Α. Ε.

Έν Άγιε Παρασκευῇ τῷ 30 Μαρτίου 1978

Υπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας
καὶ Ὑποθημάτων
Δ/σιν Μέσης Ἐκπαίδευσης
Ἀ θ ῆ ν α ς

ΘΕΜΑ : Ἀπόσπασις Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν Α.ΠΕΡΙΣΤΕΡΟΠΟΥΛΟΥ.

ΣΧΕΤ.: Ἡ ἀπὸ 30.3.73 αἴτησις τοῦ ἀνωτέρω, περὶ ἀποσπάσεώς
του εἰς Ε.Ι.Ε., ὁμάδα Καθηγ.Δ.Α.ΚΑΠΠΟΥ".-

Ὁ Καθηγητὴς κ.Α.ΠΕΡΙΣΤΕΡΟΠΟΥΛΟΣ ἐργάζεται ἀπὸ κολλοῦ εἰς
προβλήματα σχετικὰ μὲ τὸ ἔργον τοῦ Ἑλληνικοῦ Μαθηματικοῦ τῆς ἀρχαιό-
τητος Ἀπολλωνίου.

Ἱστορικαὶ ἔρευναι σχετικαὶ πρὸς τὰ μαθηματικὰ τῆς ἀρχαιό-
τητος δὲν ἔτυχον συστηματικῆς καλλιέργειας εἰς τὴν χώραν μας, καίτοι,
κατὰ τὴν γνώμην μου, τοιοῦτου εἴδους ἔρευναι ἔπρεπε νὰ ἐνισχύωνται.

Ὡς γνωστὸν, ὁ Ἐπίτιμος Ἐκπαιδευτικὸς Σύμβουλος κ.Ε.ΣΤΑΜΑ-
ΤΗΣ, εἶναι ὁ μόνος ὁποῖος διενεργεῖ τοιαύτας ἐρεῖνας. Τελευταίως
δὲ ἐργάζεται εἰς τὴν μετάφρασιν τῶν ἔργων τοῦ Ἀπολλωνίου.

Ἐχω τὴν γνώμην ὅτι τὸ Ὑπουργεῖον Παιδείας θὰ ἠδύνατο νὰ
προβῇ εἰς τὴν θυσίαν, ὥπως ὁ κ.ΠΕΡΙΣΤΕΡΟΠΟΥΛΟΣ ἀποσπασθῇ εἰς Ἀθή-
νας καὶ ἐνταχθῇ εἰς μίαν ὁμάδα ἐρευνῶν, τὴν ὁποίαν διευθύνω εἰς
Ε.Ι.Ε. καὶ οὕτω, ὑπὸ τὴν ἐπίβλεψίν μου, βοηθήσῃ τὸ ἔργον τοῦ κ.
ΣΤΑΜΑΤΗ καὶ προσωπικῶς ἀσχοληθῇ μὲ ἱστορικὰς ἐρεῖνας.

Ἐνεκα τῶν ἀνωτέρω προτείνω τὴν ἀπόσπασίν του εἰς Ἀθήνας.-


Καθηγητὴς Δ.Α.ΚΑΠΠΟΣ

/κη

Ἀγαπητέ Κε Ἀ. Περιοτερόπουλε,

Ἔλαβον πρό τινων ἡμερῶν τὸ ἐπι-
σιπτηρίόν σας καὶ χθὲς τὰ δύο τεύχη τοῦ διδύμου σας

"Τὸ πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου ἢ τῶν ἐπαθῶν".

Σας εὐχαριστῶ θερμῶς διὰ τὴν ἀποστολὴν τοῦ ἐν λόγῳ
διδύμου σας. Τό ἔχω διατρέξει μὲ ἐξαιρετικὸν ἐνδιαφέρον
καὶ αἰσθάνομαι τὴν ὑποχρέωσιν νὰ σας εὐχαρίσω τὰ πλεόν
θερμὰ συγχαρητήριά μου, τόσον διὰ τὴν ἐν γένει ἀντι-
μετώπισιν τοῦ ὡραίου θέματος ὅσον καὶ διὰ τὴν ἀκρι-
βειαν καὶ πληρότητα ἣ ὅποια χαρακτηρίζει τὴν συγ-
γραφὴν σας.

Σας εὐχομαι νὰ συνεχίσετε τὸν ὡραῖον δρόμον
τὸν ὁποῖον διαποίετε καὶ δὰ εἶμαι εὐτυχὴς, ὥς
παλαιός σας διδάσκαλος, νὰ παρακολουθῶ μὲ ἀγάπην
καὶ ἐνδιαφέρον καὶ νὰ εἶναι νὰ σας δημιουργίαν καὶ καὶ νὰ εἶναι
πρόοδον.

Με πολλὴν ἀγάπην

Μ. Α. Μυρίκας

Υ.Γ. Λυποῦμαι διότι μόλις τώρα μαθαίνω ὅτι ἀπὸ πέρις
μου ἔχετε ἀποσταλῆναι τὸ 1^{ον} τεύχος. Δυστυχῶς δὲν τὸ ἔλαβα
ποτέ. Ἡ ΕΜΕ δὲν μὲ εἰδοποίησε σχετικῶς.

Ὅταν ἔρδητε εἰς Ἀθήνας, δὰ χαρῶ πολύ νὰ σας ἴδω.

- 1971.— Ioria, Gino. Ιστορία τῶν Μαθηματικῶν, κατὰ μετέφρασιν ἐκ τοῦ ἑλληνικοῦ πρωτοτύπου ὑπὸ Μιχαήλ Κ. Κωβαίου, Τόμος Α', σελ. 81.
(Ἑλληνικός τίτλος: Storia delle Matematiche I, Milano). Ἐκδόσεις Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἑταιρείας. Πρόλογος συγγραφέως εἰς Ν' τόμον, Ἰανῶνα, 1928.
- 1972.— Περισσερόπουλος, Ἀναστασιος. Τὸ πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου ἢ τῶν ἐπαφῶν. Ἀθήνα.
- 1972.— Hofmann, Joseph E. Über antike Beispiele zur Extremwerthbestimmung und ihr weiterwirken, in Der Mathematik Unterricht 2, S. 10.
- 1973.— Περισσερόπουλος, Ἀναστασιος. Τὸ πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου ἢ τῶν ἐπαφῶν, βιβλίον II. Λύσις διὰ τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν, Ἀθήνα.

Ἀπόσπασμα διβλιογραφίας τοῦ διδλίου:

«ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ ΚΩΝΙΚΑ» Ε.Σ. Σταμάτη,
ἐκδόσις Ἑπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, Ἀθήνα 1975.

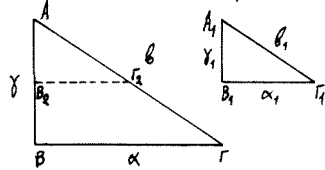
- editos Bononiae 1556, cum graeco textu ab ibso margini addito et cum versione arabica.
- 1566.— Απολλωνί Περγαι Cincorum libri quatuor. Una cum Pappi... Lemnatis, et Commentariis eutoci Ascalonitae. SERENI Antiochenis... libri duo, nunc primum in lucem editi. Quae omnia super F. Comandinus. e graeco conuertiti, et commentaria illustravit.
Ex officina A. Benatii, Bononiae.
- 1596.— Roomen, Aven. Problema.
Apollonium, Würzburg. Zum B. M. 8534. e. 37.
Inhalt vgl. H. Bösman, in: Ann. Soc. sci. Brüssel 29 (1905), S. 68/79.
- 1600.— Francesci Vietae Apollonius Gallus, seu excusitata Apollonii Pergaei
Excudebat D. Le Clerc, Parisiis.
B.N. V. 6210 bis(4); Rés. V. 836; B.M. C. 73. d. 9(1)
- 1607.— Marini Ghetaldi... Apollonius redivivus, seu Arestitata Apollonii Pergaei Inclinationum geometria...
Apud B. Juntam, Venetiis.
B.N. V. 6079 (1)
- 1607.— Marini Ghetaldi... Supplementum Apollonii Galli, seu excusitata Apollonii Pergaei Tactionum geometriae pars reliqua
Apud V. Fiorinam, Venetiis.
B.N. V. 6079 (2)
- 1607.— Willebrordi Snellii. Περὶ Λόγου ἀποτομῆς καὶ πρὸς Χωρίων ἀποτομῆς (ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ) resuscitata geometria.
Ex officina Plantiniana Raphelengii, Lugodini.
B.N. Rés. V. 867.
- 1608.— Willebrordi Snellii Apollonius Batavus, seu excusitata Apollonii Pergaei. Περὶ Διοριμένης τομῆς geometria.
Excudebat J. a Dorp, Lugodini.
B.N. Rés. V. 866; B.M. 1044. d. 21 (2).
- 1609.— Franciscus Vieta, Opera mathematica. Paris.
- 1612.— Alexandri Andersonii... Supplementum Apollonii redivivi sive Analysis problematis hactenus desiderati ad Apollonii Pergaei doctrina Περὶ Νείσεως, a Marini Ghe-

ΠΡΟΒΛΗΜΑ VII.

§ 50. Προτάσομεν ὁρθώστως ὑποτάσεις τινὰς γεωμετρικὰς καὶ ἀνωδεκνύομεν καὶ τας.

§ 51. α') Δίδονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A_1B_1\Gamma_1$, τοιαῦτα ὥστε $\frac{A_1B_1}{A_1\Gamma_1} = \frac{AB}{A\Gamma}$ καὶ $\hat{B} = \hat{B}_1 = 1^\circ$. Θὰ ἀνωδείξωμεν ὅτι ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: 1^{ος} τρόπος: Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς AB τὸ $AB_2 = A_1B_1$ καὶ ἐπὶ τῆς $A\Gamma$ τὸ $A\Gamma_2 = A_1\Gamma_1$, ὥστε $\frac{AB_2}{AB} = \frac{A\Gamma_2}{A\Gamma}$ καὶ ἄρα $B_2\Gamma_2 \parallel B\Gamma$. Ἐπομένως $\triangle AB_2\Gamma_2 \sim \triangle AB\Gamma$.

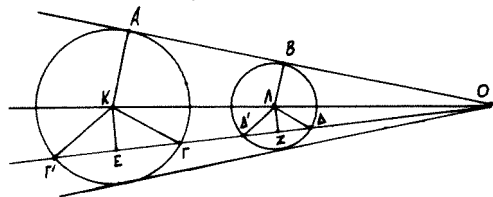


Σχ. 50.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $AB_2\Gamma_2$ (διότι $\widehat{AB_2\Gamma_2} = \widehat{AB\Gamma} = 1^\circ$) καὶ $A_1B_1\Gamma_1$ εἶναι ἴσα. Ἄρα: $\triangle A_1B_1\Gamma_1 \sim \triangle AB\Gamma$. 2^{ος} τρόπος: Ἐχομεν ἐξ ὑποθέσεως: $\frac{b_1}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\beta}$ ἢ $\frac{b_1^2}{\beta^2} = \frac{\gamma_1^2}{\beta^2} = \frac{b_1^2 - \gamma_1^2}{\beta^2 - \gamma_1^2} = \frac{\alpha_1^2}{\alpha^2}$ ἢ $\frac{b_1}{\beta} = \frac{\gamma_1}{\beta} = \frac{\alpha_1}{\alpha}$. Ἄρα $\triangle A_1B_1\Gamma_1 \sim \triangle AB\Gamma$.

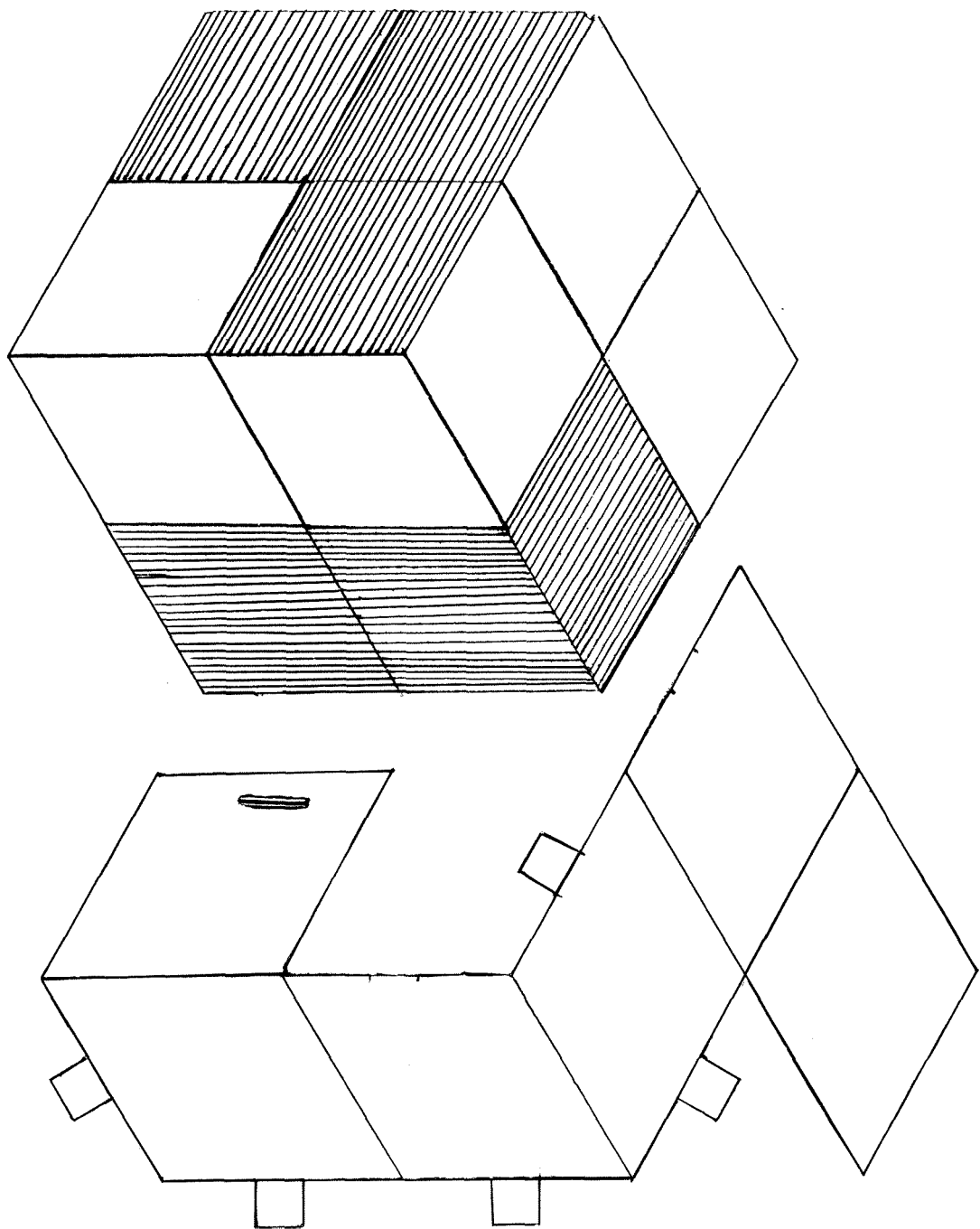
§ 52. β') Δίδονται δύο ἄνιστοι περιφέρειαι (κ) καὶ (λ) καὶ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν AB . Ἀὕτη ὠροευτειομένη τέμνει⁽⁹⁾ τὴν ὠροέυκασιν τῆς διαμέτρου KL ἐν τῷ σημείῳ O . Ἄν αἱ ἀκτῖνες $K\Gamma$ καὶ $ΛΔ$ εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροθοι, τότε ἡ $\GammaΔ$ διέρχεται ἐν τοῦ O . Καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις: Ἐστω ὅτι ἡ $\GammaΔ$ ὠροευτειομένη τέμνει τὴν διάμετρον KL ἐν τῷ σημείῳ O . Ὄσότε: $\frac{OK}{OL} = \frac{AK}{LD}$.



Σχ. 51.

⁽⁹⁾ Ἡ 49 σελίδα τοῦ Α' διδλίου μου: «Τὸ πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου ἢ τῶν ἐπαφῶν», ὅπου διατυπώ-
νω τέταρτο κριτήριο ὁμοιότητος τριγώνων (ὀρθογώνιων). Γιά πρώτη φορά τοῦτο ἐγράφη σέ Γεωμε-
τρία τοῦ Ο.Ε.Δ.Β. τό 1976· ἐπρότάθη δέ καί στίς πανελλήνιες ἐξετάσεις τοῦ '81.



Ἀποκόψτε τὸ γραμμοσκιασμένο στὸ κανονικὸ ἑξάγωνο.

Ἀναδιπλώστε τὸ ἀπομείναν πάνω στὶς ἀκμές.

Προκύπτει (ἀποδεικνύεται) ἓνα σχῆμα τῆς Στερεομετρίας.

Ἄς τὸ ὀνομάσουμε: «ρομβοκύβο».

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ

